

Peter Baumann, Thomas Bedürftig, Karl Kuhlemann (Hrsg.)

dx, dy – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen.

Eine Handreichung.

Auflage R

Peter Baumann, Thomas Bedürftig, Karl Kuhlemann (Hrsg.)

dx, dy

Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen.

Eine Handreichung.

Mit Beiträgen von

Peter Baumann [Ba]

Berlin

Thomas Bedürftig [Be]

Hannover

Volkhardt Fuhrmann [F]

Worms

Christine Hahn [H]

Worms

Christian Kauferstein [Ka]

Linz am Rhein

Thomas Kirski [Ki]

Berlin

Karl Kuhlemann [Ku]

Altenberge

und Links zu

Stefan Basiner

Dortmund

Jochen Dörr

Speyer

Stefanie Heinsen

Bolanden

Wilfried Lingenberg

Pirmasens

Die Handreichung ist aus Lehrerfortbildungen, aus der Unterrichtspraxis und aus Arbeitstreffen mit Kolleginnen und Kollegen hervorgegangen. Das Projekt wird seit 2015 vom Institut für Lehrerfortbildung (ILF) in Mainz unterstützt.

ISBN 978-3-00-065642-2

© Die Urheberrechte liegen bei den jeweiligen Autoren. Die private Nutzung der Handreichung sowie Vervielfältigungen daraus sind, mit Angabe der Quelle, für den Unterricht und die Lehre ausdrücklich erlaubt. Jede weitere, insbesondere kommerzielle, Nutzung muss mit den Autoren schriftlich vereinbart werden.

Berlin, Hannover, Altenberge 2025

Baumann@nichtstandard.de
beduerftig@idmp.uni-hannover.de
kus.kuhleermann@t-online.de

Wir widmen die Handreichung unserem Kollegen und Mitautor

Dr. Thomas Kirski,

der im Januar 2021 nach langer Krankheit starb. Wir sind dankbar für die
Zeit unserer Zusammenarbeit.

Vorwort

Wir schlagen in dieser *Auflage* $\mathbb{R}$ einen Einstieg in eine schulische *Nichtstandardanalysis in den reellen Zahlen* vor. dx , dy werden infinitesimale *reelle* Zahlen sein. Ist das möglich? Ja. Es liegt sogar auf der Hand, wenn man genauer in die Axiomatik der reellen Zahlen schaut. Das hat Karl Kuhlemann in dem Buch

Nichtstandard-Analysis – in der Hochschuldidaktik, Logik und Philosophie (Verlag De Gruyter, Berlin 2024)

getan. In der Einleitung wird die Plausibilität, man kann sagen: Notwendigkeit eines solchen Ansatzes begründet. Bemerkenswert ist, dass der mengentheoretisch-logische *Status* dieser Nichtstandardanalysis der von Standard ist. Er setzt weder Auswahlaxiom noch Ultrafiltersatz voraus, noch impliziert er sie.

Im Kapitel 2 entwirft der Autor ein vorlesungs-ergänzendes Seminar zur Analysis. Es ist nicht schwer, methodische, begriffliche und sprachliche Dinge für die Schule angemessen zu übersetzen. Das geschieht hier in den Unterrichtsgängen. Die *Unterrichtsverläufe* im Kapitel 2 der Handreichung unterscheiden sich nicht von den Auflagen zuvor. Dort haben wir infinitesimale Zahlen *erfunden* und $\mathbb{R}$ zu den hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$ erweitert. Hier *entdecken* wir sie *in* den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. – In der Einleitung sagen wir mehr dazu. Im Kapitel 3 erläutert Karl Kuhlemann den mathematischen und historischen Hintergrund des Ansatzes.

Unser Einstieg in die Analysis beginnt wie jeder andere. Wenn es um die Ableitung geht, beobachtet man gewöhnlich Steigungsdreiecke an Funktionsgraphen, die in einem Prozess der Näherung kleiner und kleiner werden und, wie wir es gelernt haben, verschwinden. Für viele Schüler verschwinden sie nicht. Sie sprechen von einem unendlich kleinen Dreieck, in das der Prozess mündet, mit unendlich kleinen Seiten. Diese Vorstellung nehmen wir auf. Sie entspricht dem charakteristischen Dreieck in der Infinitesimalrechnung bei Leibniz. Leibniz rechnete mit infinitesimalen Größen. In der

Nichtstandard-Analysis sind sie heute infinitesimale Zahlen. Ihre elementare Arithmetik wird mit den Schülern – bewusst als Theorie – entwickelt.

Das elementare Rechnen mit den neu entdeckten Zahlen tritt an die Stelle des abstrakten Grenzwertformalismus. Unendlich kleine Strecken bieten eine – mathematisch legitime – geometrische Veranschaulichung der Verhältnisse beim Differenzieren und später beim Integrieren (vgl. (Elemente 2022), Kap. 6).

Es geht hier in der Handreichung allein um den Einstieg. Alles Folgende ist wie sonst: Die Arbeit mit den Schulbüchern und Materialien geht weiter, und es gibt keinen Konflikt mit den Lehrplänen der Bundesländer (s. Kap. 4). Wir schlagen diesen Einstieg vor, da wir gute und interessante Erfahrungen im Unterricht gemacht haben – bis ins Abitur hinein. Geometrische Anschaulichkeit, elementare Arithmetik – statt Limesformalismus – und gedankliche Nachhaltigkeit sind die Vorzüge unseres Ansatzes. Die Erfahrung zeigt zudem eine wesentliche Zeitersparnis gegenüber dem Einstieg mit Grenzwerten.

Der Kern unserer Handreichung ist das Kapitel 2. Um konkret zu sehen, was neu – und dass vieles wie gewohnt – ist, kann der Leser gleich z.B. in den Unterrichtsgang 2.1 zur Ableitung springen oder im Abschnitt 2.3 der Entwicklung der erweiterten reellen Arithmetik folgen. Der Unterrichtsgang 2.1 entspricht ganz dem der Auflage 2 der Handreichung, so, wie ihn Christine Hahn und Volkhardt Fuhrmann aufgeschrieben haben. Allein kurze Formulierungen, meist nur einzelne Worte, wurden von Karl Kuhlemann und Thomas Bedürftig in den $\mathbb{R}$ -Ansatz übersetzt.

Berlin
Hannover
Altenberge

*Peter Baumann
Thomas Bedürftig
Karl Kuhlemann*

im Oktober 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Unterrichtsgang	9
2.1	Ableitung	9
2.2	Integral	20
2.3	Arithmetik	32
2.3.1	Ein Beweis im Unterrichtsgespräch	41
3	Grundlagenaspekte und historische Bezüge [Ku]	43
3.1	Die reellen Zahlen (aus der Sicht der Lehrenden)	43
3.2	Der Aufbau des Zahlensystems	44
3.3	Die reellen Zahlen in ungewohntem Licht	45
3.4	Das Axiomensystem SPOT	47
3.5	Die reellen Zahlen (aus der Sicht der Lernenden)	49
3.6	Ein historischer Vergleich	51
4	Richtlinien, Aufgaben, Abitur	53
4.1	Lehrplanvorgaben der Bundesländer	53
4.2	Aufgabensammlung	63
5	Literatur und Links	71
5.1	Auswahlbibliographie	73

Kapitel 1

Einleitung

Vorgehensweise

Hier, in der Handreichung, wird konkret der Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen dargestellt. Gewöhnlich erfolgt der Einstieg in die Analysis über Grenzprozesse und Grenzwerte. Das ist Standard. Wir folgen in unserem Zugang dem Ansatz der sogenannten „Nichtstandard-Analysis“. „Nichtstandard“ hört sich nach „exotisch“ oder „verboten“ an, was falsch ist. Richtig ist, dass „Nichtstandard“ so mathematisch wie „Standard“ ist, – nur (noch) nicht der Standard im Unterricht und in der Lehre. Unsere Erfahrungen zeigen, dass der Nichtstandard-Einstieg in die Analysis dem üblichen Grenzwerteinstieg überlegen ist – was Anschaulichkeit, elementares Rechnen – statt Limesformalismus –, sowie Nachhaltigkeit und zeitlichen Aufwand betrifft.

In unseren Unterrichtsgängen denken wir den üblichen Grenzwerteinstieg mit und zitieren ihn, wo es passt, in den Kommentarspalten. Wir heben hervor, dass in unserem Zugang die bekannten Probleme der Grenzprozesse und Grenzwerte nicht auftreten. Diese Probleme sind so gravierend, dass man in den Lehrplanvorgaben auf einen unpräzisen, gefühlsmäßigen „propädeutischen Grenzwertbegriff“ ausgewichen ist. Der Zugang hier mit seiner Arithmetik bietet hingegen eine klare mathematische Grundlage. Sie ist, das zeigen die Erfahrungen, ein tragfähiges Fundament für die folgenden Jahre Analysis in der Schule und darüber hinaus.

Infinitesimalien in dieser Handreichung sind *reelle* Zahlen oder Strecken. Wir sprechen von „infinitesimalen“ Zahlen und Strecken. Gibt es sie? Wir entdecken sie! Da infinitesimale Zahlen hier reelle Zahlen sind, kann man Strecken infinitesimaler Länge – wie jede gewöhnliche sehr kleine Strecke –

durch eine Vergrößerung sichtbar machen, nämlich unter einer *infini*t starken „Lupe“, die mit einem *infini*ten Faktor vergrößert. *Infinite* Zahlen entdecken wir gleich mit – als Inverse der infinitesimalen Zahlen. In (Elemente 2022, Kap. 6) wird die „Unendlichkeitslupe“ für den hyperreellen Fall legitimiert. Infinitesimale Strecken sind neu entdeckte ideale geometrische Elemente und bilden den anschaulich-geometrischen Hintergrund unseres Einstiegs.

Der Abschnitt 2.3 ist ganz dem erweiterten Rechnen gewidmet. Er versucht einen Weg zu zeigen, wie die neu entdeckten Zahlen, die *infinitesimalen* wie die *infini*ten Zahlen, *gemeinsam* mit den Schülerinnen und Schülern, eingeführt werden können. Der Abschnitt 2.3 beginnt mit dieser Frage: Gibt es „unendlich kleine“, „infinitesimale“ reelle Zahlen? Wir „entdecken“ sie und entwickeln die Arithmetik mit den Schülerinnen und Schülern bewusst und ausdrücklich als *Theorie*.

Im Kapitel 4 stellen wir Auszüge aus den Lehrplänen der Bundesländer zusammen und stellen und lösen Aufgaben, wie sie auch im Abitur vorkommen können. Die Abschnitte zeigen, dass unser Ansatz kompatibel ist mit den ministeriellen Vorgaben und wie Lösungen von Abituraufgaben non-standard aussehen können. Ein sparsames Literaturverzeichnis und einige Literaturempfehlungen schließen die Handreichung ab. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis findet man in dem Lehrbuch (Elemente 2022).

Zum mathematischen Hintergrund

Von den Gegenständen aus dem mathematischen und historischen Hintergrund unseres Ansatzes in dieser *Auflage* $\mathbb{R}$ handelt das Buch *Nichtstandard-Analysis – in der Hochschuldidaktik, Logik und Philosophie* (Verlag De Gruyter, Berlin 2024) von Karl Kuhlemann, dessen Konzept für Proseminare wir in die Praxis des Unterrichts übertragen. Das Kapitel 3 dieser Handreichung beschreibt und klärt Aspekte des Hintergrundes, seine Besonderheit, seine Bedeutung und seine Nähe zum Ursprung, zu Leibniz' Infinitesimalrechnung.

Die vielleicht überraschende Annahme infinitesimaler reeller und *infini*ter reeller und natürlicher Zahlen, die wir oben machten, wollen wir schon hier knapp kommentieren. Wir gehen aus von den reellen Zahlen, so wie sie standardmäßig in der Schule vorgegeben und als reelle Punkte auf der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Mathematisch, jenseits der Schule, werden die reellen Zahlen axiomatisch charakterisiert. Die Axiome der Theorie der reellen Zahlen schließen nicht aus, dass es *infinite* natürliche Zahlen und damit infinitesimale reelle Zahlen gibt. Also kann man sie annehmen.

Dazu gehört eine spezielle Sprachregelung, die wir im Abschnitt 2.3 einführen und systematisch verwenden. Wir unterscheiden die neu entdeckten

reellen Zahlen von den geläufigen reellen Zahlen. Letztere sind die reellen „Standardzahlen“, die neu entdeckten die reellen „Nichtstandardzahlen“. Zusammen bilden sie die Menge der reellen Zahlen, für die alle Axiome der Theorie der reellen Zahlen gelten (von denen aber hier so wenig wie sonst die Rede ist). Wir erweitern also nicht den Zahlbereich, sondern die Sprache.

Ein Axiom hält die Entdeckung einer infinitesimalen reellen Zahl fest:

Vereinbarung: Es gibt eine reelle Zahl x mit $|x| < s$ für alle positiven Standardzahlen s .

Bei der Arbeit mit den reellen Zahlen im Einstieg erkennt man die Notwendigkeit zweier weiterer Axiome, die das Verhältnis zwischen reellen „Standardzahlen“ und allen reellen Zahlen regeln. Am Ende von 2.3 werden sie schülergemäß im Rückblick auf das Rechnen zuvor formuliert. Es sind das *Transferaxiom*, das Aussagen über reelle Standardzahlen auf alle reellen Zahlen überträgt, und das *Standardteilaxiom*, das zu jeder finiten reellen Zahl y eine Standardzahl s sichert, die infinitesimal benachbart ist zu y .

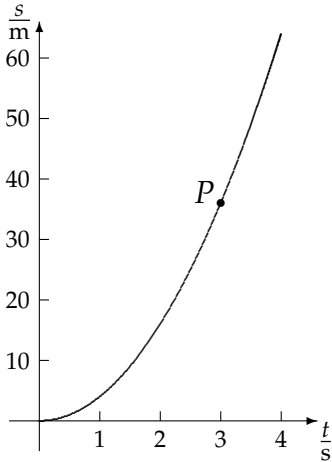
Kapitel 2

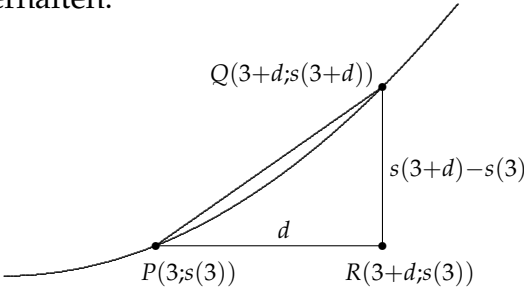
Unterrichtsgang

2.1 Ableitung von Funktionen

Die im Folgenden vorgestellte Unterrichtsreihe zum Einstieg in die Differentialrechnung kommt ohne die üblichen Grenzwertprozesse aus. An deren Stelle tritt eine fundierte Arithmetik, mit deren Hilfe die aus der Standard-Mathematik bekannten Grenzwerte berechnet werden.

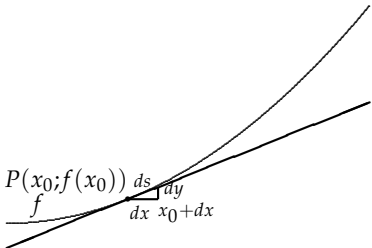
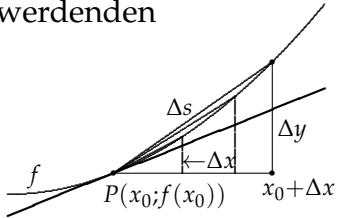
Die gewonnenen Ergebnisse sind also nicht neu, deren Bestimmung liegen aber verschiedene Anschauungen zugrunde: Sind es standard-mathematisch eigentlich abstrakte epsilon-delta-Formalismen, von denen im Unterricht in der Regel nur unklar auf propädeutische Grenzwertformulierungen ausgewichen wird, so werden wir hier mit infinitesimalen reellen Zahlen rechnen. Dieses Rechnen deuten wir dort an, wo und soweit wir es brauchen. Systematisch wird das Rechnen mit allen reellen Zahlen, standard wie nichtstandard, in der Unterrichtsskizze 2.3 entwickelt.

Unterrichtsgang Ableitung	Kommentar
<i>Von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit</i> Einführende Aufgabe: <i>Bei maximaler Beschleunigung eines „Ferrari 458 Italia“ aus dem Stand lässt sich die zurückgelegte Wegstrecke in Abhängigkeit von der Zeit mit der Funktion $s = 4t^2$ beschreiben (s in Metern, t in Sekunden).</i> <i>Welche Geschwindigkeit hat der Ferrari drei Sekunden nach dem Start erreicht?</i>  Idee: Die <u>gesuchte Momentangeschwindigkeit</u> lässt sich nicht sofort angeben, aber wegen $v = \frac{s}{t}$ erhält man sicher eine gute Näherung, wenn man die zurückgelegte Strecke einmal nach 3 Sekunden und dann noch einmal eine kurze Zeit später (z.B. nach 3,2 Sekunden) berechnet und dann die Weg- und Zeitdifferenzen dividiert: $v \approx \frac{s(3,2) - s(3)}{0,2s} = 24,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$	<i>Unterrichtsabschnitt 1</i> Hier können auch andere Eingangsbeispiele verwendet werden (Steigung der Normalparabel, andere Beschleunigungsprobleme wie Freier Fall usw.) und natürlich das bisher favorisierte Eingangsbeispiel eines jeden Lehrers im <i>Standardanalysis-Unterricht</i>. Allen möglichen Einführungsbeispielen gemeinsam ist das Problem, die Steigung eines krummlinigen Graphen in einem Punkt zu bestimmen, also das „Tangentenproblem“: Die Tangente mit ihrer Steigung liefert die Steigung des Graphen in einem bestimmten Punkt und somit – je nach Aufgabenstellung – die

Unterrichtsgang Ableitung	Kommentar
Diese 24,8 m/s stellen die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall von 3 bis 3,2 Sekunden dar; graphisch bedeutet dieser Wert die Steigung der Sekante durch die Punkte $P(3/s(3))$ und $Q(3,2/s(3,2))$. Eine noch bessere Näherung ergibt sich für eine zeitliche Differenz von 0,1 Sekunde: $v \approx \frac{s(3,1) - s(3)}{0,1\text{s}} = 24,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$ Allgemein kann man für die zeitliche Differenz d die Näherungsgeschwindigkeit mithilfe des Terms $v \approx \frac{s(3+d) - s(3)}{d}$ erhalten.  Aber egal, wie klein man d vorgibt, es bleibt ein Näherungswert. $\Rightarrow$ Das Steigungsdreieck müsste unendlich klein werden. Dann würde aus der Sekante mit ihrer Sekantensteigung eine Tangente mit ihrer Tangentensteigung, die dann der Steigung der Parabel in diesem Punkt $P(3; s(3))$ entspricht. Aus einer Durchschnittsgeschwindigkeit würde die gesuchte <u>Momentangeschwindigkeit</u>.	momentane Änderungsrate bzw. die Momentangeschwindigkeit. Man bildet wie üblich zunächst Sekanten mit zugehörigen Steigungsdreiecken und Differenzenquotienten der Form $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Näherung für die gesuchte Tangentensteigung. Es sind zumeist die Schülerinnen und Schüler selbst, die die Steigungsdreiecke als „unendlich klein“ fordern, um die Näherung zu verbessern. Im folgenden sagen wir „infinitesimal“.

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<i>Exkurs</i> Diese unendlich kleinen, „infinitesimalen“ Zahlen kann man sich so vorstellen: 1. <u>Infinitesimale Zahlen</u> sind kleiner als jede positive <u>Standardzahl</u> und größer als jede negative Standardzahl. 2. Die Summe und die Differenz zweier Infinitesimalzahlen sind wieder infinitesimal. 3. Das Produkt aus einer infinitesimalen und einer Standardzahl ist infinitesimal. 4. Definition: Zahlen der Form $r + dx$, wobei r standard und dx infinitesimal sind, heißen <u>finite Zahlen</u>. r ist der <u>Standardteil</u> der finiten Zahl. <u>Anschauliche Begründung für 1. und 2.:</u> Außer 0 liegt keine weitere Standardzahl auf diesem unendlich vergrößerten Ausschnitt der Zahlengeraden!  Auch die Summe und die Differenz zweier solcher Infinitesimalen sowie deren Produkt mit Standardzahlen bleiben in diesem Ausschnitt und sind damit kleiner als jede positive Standardzahl, also infinitesimal.	<i>Unterrichtsabschnitt 2</i> Die Infinitesimalzahlen sind spezielle reelle <u>Nichtstandardzahlen</u>. Ihre Arithmetik wird in der Unterrichtsskizze 2.3 gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern entwickelt – beginnend mit der Frage „Wie können wir ausdrücken, dass eine Zahl infinitesimal ist?“ Für das Verständnis der Schülerinnen und Schüler und die benötigten Rechnungen sind die wenigen hier im Exkurs genannten Informationen über die Infinitesimalzahlen ausreichend. In diesem Unterrichtsgang steht das möglichst schnelle Lösen des Steigungsproblems im Vordergrund. Daher sind hier keine Beweise vorgesehen (s. 2.3). Wer dennoch an dieser Stelle Beweise führen möchte, für den seien sie hier angedeutet: Zu 2.: α und β seien infinitesimal. Dann sind beide kleiner als $\frac{r}{2}$ für jedes positive standard r. Daher ist $\alpha + \beta < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Also ist auch $\alpha + \beta$ infinitesimal.

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<i>Differentialquotient und Ableitung</i> Mit Hilfe dieser infinitesimalen Zahlen können wir nun das Steigungsdreieck infinitesimal wählen. Wir nennen die infinitesimale Zeitdifferenz dt und rechnen mit ihr so weiter: $\begin{aligned} \frac{s(3+dt)-s(3)}{dt} &= \frac{4 \cdot (3+dt)^2 - 4 \cdot 3^2}{dt} \\ &= \frac{4 \cdot (9 + 6dt + dt^2) - 36}{dt} = \frac{36 + 24dt + 4dt^2 - 36}{dt} \\ &= \frac{24dt + 4dt^2}{dt} = 24 + 4dt. \end{aligned}$ Mit dt ist auch $4dt$ infinitesimal (vgl. Exkurs). Das bedeutet, dass der Unterschied zwischen dem gefundenen Wert und der gesuchten Momentangeschwindigkeit kleiner ist als jede positive Standardzahl. Man sagt hierfür auch: Der Wert ist <u>infinitesimal benachbart</u> zu 24. Man darf den Unterschied vernachlässigen und die gesuchte Momentangeschwindigkeit mit $24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ angeben, da 24 der Standardteil der finiten Zahl ist, und nur dieser ist in der realen Situation erfassbar. Das Vorgehen mit infinitesimalen Änderungen dx zur Berechnung der momentanen Änderungsrate bzw. Momentangeschwindigkeit lässt sich folgendermaßen <u>veranschaulichen</u>:	Zu 3.: Sei α infinitesimal und k standard und positiv. Dann ist $\alpha < \frac{r}{k}$ für jedes positive standard r. Daher ist $k \cdot \alpha < k \cdot \frac{r}{k} = r$. Also ist auch $r \cdot \alpha$ infinitesimal. <i>Unterrichtsabschnitt 3</i> Hier wird deutlich, dass die Infinitesimalien beim Lösen eines realen Problems als rechnerisches Kalkül verwendet werden. Als Lösung des realen Problems zählt daher dann auch genau der <u>Standardteil</u> des finiten Ergebnisses. In der Gegenüberstellung zur üblichen Vorgehensweise in der <i>Standard-Mathematik</i> zeigen sich die Vorzüge des infinite-

Unterrichtsgang Ableitung	Kommentar
 Das <u>Steigungsdreieck</u> wird infinitesimal („<u>charakteristisches Dreieck</u>“), aber es <u>bleibt erhalten!</u> Wir betrachten es quasi mit einer „<u>Unendlichkeitslupe</u>“ (s. Elemente 2022, 6.2). Die Steigung bleibt – mit der Hypotenuse im infinitesimalen Sekantendreieck – sichtbar. Die Hypotenuse ist Teil der Tangente <i>und</i> der Kurve. Da das Dreieck erhalten bleibt, kann deren Steigung mit Hilfe der infinitesimalen Zahlen <u>exakt berechnet</u> werden. Es ergibt sich eine finite Zahl, deren Standardteil die gesuchte momentane Änderungsrate liefert.	simalen Zugangs in deren besonderer <u>Anschaulichkeit</u> und der zugrunde liegenden <u>fundierten Arithmetik</u>. Im <i>Standard-Zugang</i> nähern sich die Hypotenusen von immer kleiner werdenden  <u>Sekantendreiecken</u> in einem unendlichen Prozess der Kurve und <u>verschwinden</u> schließlich – nicht mehr sichtbar und daher oft schwer nachvollziehbar – im Berührungspunkt der Tangente. Die Anschauung geht verloren. Beim Grenzwertprozess „streben“ Δx (und Δy) „gegen 0“ und somit „<u>strebt</u>“ der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegen die Steigung der Tangente. Dass der am Ende des Prozesses ermittelte Grenzwert die gesuchte momentane Änderungsrate angibt, ist für die Schülerinnen und Schüler oft auch deshalb schwer nachvollziehbar, weil der Prozess den Wert nicht erreicht.

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
Das vorgestellte Verfahren zur Berechnung der momentanen Änderungsrate lässt sich auf viele weitere Beispiele anwenden und verallgemeinern für eine beliebige Stelle x: Aufgabe: Bestimme die Steigung (momentane Änderungsrate) an einer beliebigen Stelle des Graphen von $f(x) = x^2$. Bestimmung der Tangentensteigung im charakteristischen Dreieck: $ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\ &= \frac{x^2 + 2x dx + (dx)^2 - x^2}{dx} \\ &= \frac{2x dx + (dx)^2}{dx} \\ &= 2x + dx \end{aligned} $ Bestimmung der Steigung (der momentanen Änderungsrate) mit infinitesimalem dx: $2x + dx \simeq 2x,$ wobei das Zeichen $\simeq$ „infinitesimal benachbart zu“ bedeuten soll, d.h. „gleich bis auf einen infinitesimalen Unterschied“.	Das Beispiel dient Übungszwecken. Zugleich soll es durch die hier vorgenommene Gegenüberstellung verdeutlichen, dass sich bei aller Unterschiedlichkeit im Denken die Rechnungen im <i>Standard-Zugang</i> und im <i>Nichtstandard-Zugang</i> doch sehr ähneln. Bekanntes Vorgehen aus der <i>Standardanalysis</i>: Bestimmung des Differenzenquotienten: $ \begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= 2x + \Delta x \end{aligned} $ Bildung des Grenzwertes: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
Mit dem bisher Gesagten ergeben sich folgende <u>Definitionen</u>: • Für infinitesimales $dx \neq 0$ heißt der Bruch $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ ein <u>Differentialquotient</u> von f. • Wenn es zu einer Funktion f und einer Standardzahl x eine Standardzahl a gibt, so dass für jedes infinitesimale $dx \neq 0$ immer gilt: $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \simeq a$, so heißt a die <u>Ableitung von f an der Stelle x</u>, in Zeichen: $f'(x) = a$. Wir können auch sagen: Die Ableitung von f an der Stelle x ist der Standardteil des Differentialquotienten an der Stelle x. • Die Funktion f', die jedem x die Ableitung von f zuordnet, also $f' : x \mapsto f'(x)$, heißt <u>Ableitungsfunktion</u> von f, oder – wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind – kurz: Ableitung von f.	Hier wird der Unterschied deutlich erkennbar: In der <i>Standardanalysis</i> ist der Differentialquotient (oder synonym die Ableitung) der Grenzwert des Differenzenquotienten. In der <i>Nichtstandard-Analysis</i> dagegen kommt der Differentialquotient eigenständig ins Spiel. Dessen Standardteil ist dann die Ableitung.
<i>Ableitungsregeln</i> Je nach Niveau (GK oder LK) werden unterschiedliche Funktionsklassen behandelt, so dass auch entsprechende Ableitungsregeln bewiesen und angewandt werden. Beweise der Ableitungsregeln: <u>Vorbemerkung:</u> Im Folgenden wird verwendet: $df = f(x + dx) - f(x)$ und	<i>Unterrichtsabschnitt 4</i> Bei diesen Beweisen sei nochmals darauf hingewiesen, dass sie sich rein formal nicht von denjenigen in der <i>Standard-Analysis</i>

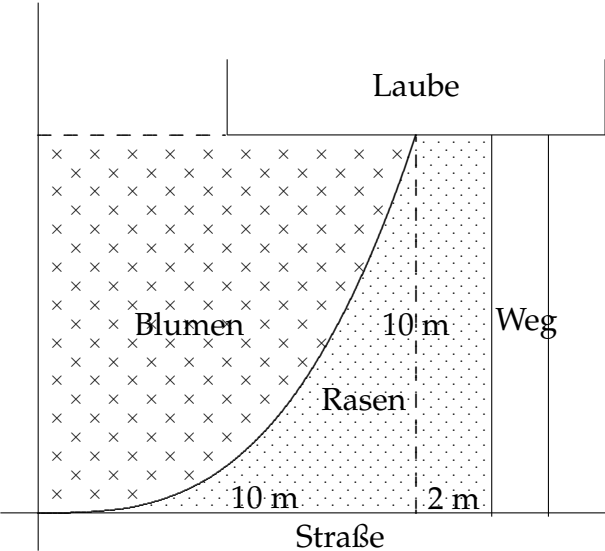
Unterrichtsgang Ableitung	Kommentar
$dg = g(x + dx) - g(x)$ sowie $f'(x) \simeq \frac{df}{dx}$ und $g'(x) \simeq \frac{dg}{dx}$. Außerdem wird die Differenzierbarkeit der Funktionen f und g vorausgesetzt. a) Faktorregel (Ableitung von $(c \cdot f)(x)$) $ \begin{aligned} \frac{(c \cdot f)(x+dx) - (c \cdot f)(x)}{dx} &= \frac{c \cdot f(x+dx) - c \cdot f(x)}{dx} \\ &= c \cdot \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \simeq c \cdot f'(x), \\ &\text{also } (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x). \end{aligned} $ b) Summenregel (Ableitung von $(f + g)(x)$) $ \begin{aligned} \frac{(f+g)(x+dx) - (f+g)(x)}{dx} &= \frac{f(x+dx) + g(x+dx) - f(x) - g(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} \\ &\simeq f'(x) + g'(x), \\ &\text{also } (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x). \end{aligned} $ c) Potenzregel (Ableitung von $f(x) = x^n$) Mit dem Binomischen Lehrsatz gilt $ \begin{aligned} \frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} &= \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} dx + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (dx)^2 + \dots + (dx)^n - x^n}{dx} \\ &= n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot dx + \dots + (dx)^{n-1} \\ &\simeq n \cdot x^{n-1}, \\ &\text{also } (x^n)' = n \cdot x^{n-1}. \end{aligned} $	<i>sis</i> unterscheiden, aber hier werden die Differentialquotienten <u>berechnet</u>, ohne propädeutische Grenzwertprozesse zu betrachten.

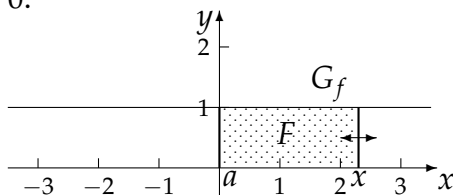
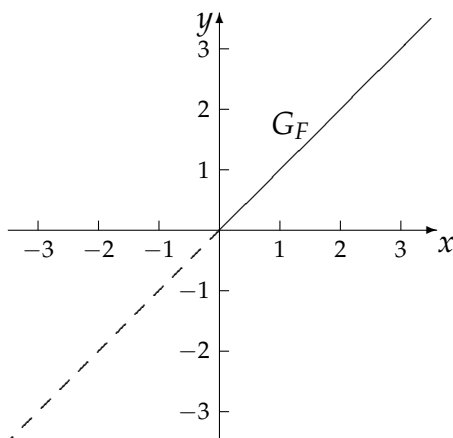
Unterrichtsgang Ableitung	Kommentar
d) Produktregel (Ableitung von $(f \cdot g)(x)$) $\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x+dx) - (f \cdot g)(x)}{dx} &= \frac{f(x+dx) \cdot g(x+dx) - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\ &= \frac{(f(x)+df) \cdot (g(x)+dg) - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg + df \cdot g(x) + df \cdot dg - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\ &= f(x) \cdot \frac{dg}{dx} + g(x) \cdot \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \cdot df \\ &\simeq f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x), \end{aligned}$ da der letzte Summand $g'(x) \cdot df$ infinitesimal ist. Also $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$	Der Beweis der Produktregel kommt hier ohne den „Trick“ der „Nulladdition“ aus, der in der <i>Standard-analysis</i> üblicherweise verwendet wird. Hier kommt vielmehr die in der <i>Nichtstandard-Analysis</i> besonders anschauliche Deutung der Stetigkeit zum Tragen, die zu einer wesentlichen Vereinfachung der Beweisführung führt.
e) Kettenregel (Ableitung von $(f(g(x)))$) $\begin{aligned} \frac{f(g(x+dx)) - f(g(x))}{dx} &= \frac{f(g(x)+dg) - f(g(x))}{dx} \\ &= \frac{f(g(x)+dg) - f(g(x))}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \\ &= \frac{f(g(x)+dg) - f(g(x))}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \\ &\simeq f'(g(x)) \cdot g'(x), \end{aligned}$ also $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$	Als einzigen mathematischen Kniff benötigt man beim <i>Nicht-Standard-Unterrichtsgang</i> an dieser Stelle die Multiplikation mit $1 = \frac{dg}{dg}$, was in der <i>Standard-Analysis</i> gar nicht möglich ist.
f) Quotientenregel (Ableitung von $(\frac{f}{g})(x)$): Sie ergibt sich aus der Produktregel, der Potenzregel und der Kettenregel. Wegen $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$ gilt: $\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot ((g(x))^{-1})' \\ &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot (-1) \cdot (g(x))^{-2} \cdot g'(x) \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}. \end{aligned}$	Natürlich lässt sich die Quotientenregel auch „zu Fuß“, ausgehend vom zugehörigen Differentialquotienten, beweisen.

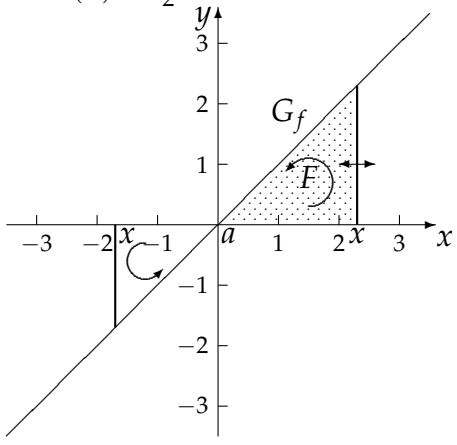
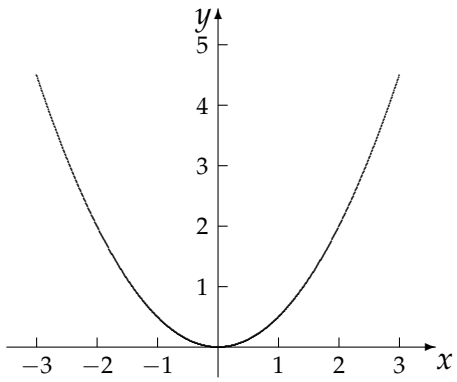
<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<i>Funktionsuntersuchungen, Anwendungen der Differentialrechnung</i> Wie gewohnt.	<i>Folgende Unterrichtsabschnitte</i> Im weiteren Verlauf der Differentialrechnung unterscheidet sich der hier vorgestellte <i>Nicht-Standard-Unterricht</i> nicht vom <i>Standard-Verlauf</i> .

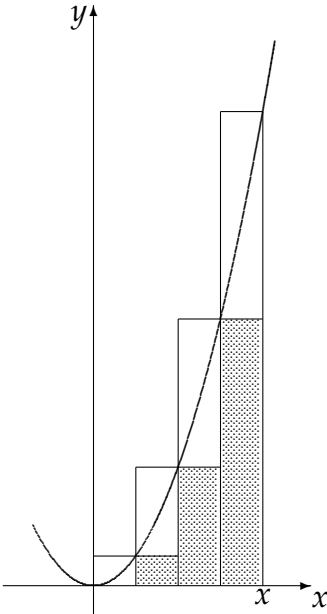
2.2 Einstieg in die Integralrechnung [Ba]

Der folgende Unterrichtsgang zur Einführung des Integrals ist elementar aufgebaut und geht, mit den bekannten Flächeninhalten geradlinig begrenzter Flächen im Koordinatensystem beginnend, Schritt für Schritt voran. Seine Intention ist es, in dieser Weise den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu erreichen. Mit dem Hauptsatz endet der Unterrichtsgang und der Analysisunterricht geht wie gewohnt weiter.

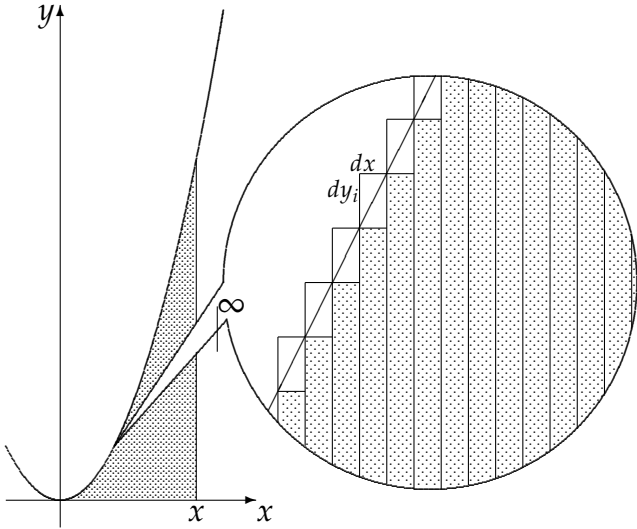
Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar
<i>Einführende Aufgabe</i> <i>Gerhard und Isolde F. besitzen am Stadtrand einen Schrebergarten. Sie möchten die Fläche zwischen der Eingangsseite des Grundstücks und der Laube neu gestalten, indem sie für den einen Teil ein Blumenbeet vorsehen und für den anderen eine Rasenfläche. Als Mathematiklehrerin hat Isolde vorgeschlagen, die Trennlinie solle eine Kurve sein, die dem Graphen der kubischen Funktion $f(x) = x^3$ entspricht (siehe Skizze). Um abschätzen zu können, wieviel m² Rollrasen sie kaufen müssen, müssen sie den Flächeninhalt der Rasenfläche herausfinden.</i> Hinweis: Die Maße sind der Skizze zu entnehmen, das Koordinatensystem wähle man geeignet, die Länge 10 m sei eine Einheit. Skizze  Die Schwierigkeit besteht darin, dass der eine Rand der Rasenfläche eine Kurve ist. Es ist „neu“ zu denken, weshalb die Berechnung von Flächeninhalten zunächst an einfachen Beispielen in Erinnerung gerufen werden muss.	<i>Unterrichtsabschnitt 1</i> Jede Lehrerin und jeder Lehrer hat sicherlich ein eigenes Beispiel mit „Anwendungsbezug“, das eingesetzt werden kann. Es ist aber durchaus erlaubt, das Flächeninhaltsproblem auch innermathematisch zu motivieren. Die Aufgabe und die mit ihr verbundene Problematik wird <i>genauso behandelt wie im Standardunterricht</i>. Im vierten Unterrichtsabschnitt (S. 26) werden unendlich große reelle Zahlen auftauchen (vgl. 2.3). Möglicherweise erinnern sich Schülerinnen und Schüler daran, wie man die Formel für den Kreisinhalt herausgefunden hat.

Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar																
<i>Inhalte von geradlinig begrenzten Flächen</i> Wäre der Rand gerade, wäre die Größe der Rasenfläche leicht zu berechnen, gleich, wie lang diese Kante wäre und wo sie verlief. Es soll zunächst herausgefunden werden, nach welchen Regeln sich der Inhalt einer Fläche verändert, wenn man ihren Rand verschiebt und damit ihre Größe ändert. Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = 1$ und der x-Achse soll bestimmt werden. Die Länge einer Seite wird dabei variiert. Dafür soll die <i>obere Grenze</i> x variabel sein, die <i>untere Grenze</i> sei fest bei $a = 0$.  <table data-bbox="315 1337 795 1421"><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td></tr><tr><td>$F(x)$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td></tr></table> 	x	0	1	2	3	-1	-2	-3	$F(x)$	0	1	2	3	-1	-2	-3	<i>Unterrichtsabschnitt 2</i> Für das folgende ist es zweckmäßig, die Graphiken mit gleichen Maßstäben untereinander anzuordnen. Das erleichtert den Blick für die Zusammenhänge. Die Wertetabelle sollte dazwischen angeordnet werden. Der Kürze halber beschränken wir uns auf positive x und positive Flächeninhalte. Hier an diese elementare Stelle aber passt gut eine Behandlung der Vorzeichenregel, auf die die negativen Werte in der Wertetabelle und Orientierungspfeile in Flächen hinweisen.
x	0	1	2	3	-1	-2	-3										
$F(x)$	0	1	2	3	-1	-2	-3										

Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar																
Auf entsprechende Weise erhält man aus der Funktion $f(x) = x$ als Flächeninhaltsfunktion $F(x) = \frac{1}{2}x^2$.  <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td></tr><tr><td>$F(x)$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>2</td><td>$\frac{9}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>2</td><td>$\frac{9}{2}$</td></tr></table> 	x	0	1	2	3	-1	-2	-3	$F(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	
x	0	1	2	3	-1	-2	-3										
$F(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$										
<i>Flächeninhalt unter einer Parabel</i> Nun soll eine Funktion für den Flächeninhalt zwischen der Parabel und der x-Achse ermittelt werden. Weil aber die Flächen einen krummen Rand haben, sind neue Überlegungen notwendig. Zur Vereinfachung wird vom Faktor $\frac{1}{2}$ abgesehen und zur Parabel mit der Funktion $f(x) = x^2$ übergegangen.	<i>Unterrichtsabschnitt 3</i> Hier besteht die Möglichkeit, verschiedene Verfahren sowie mögliche Vor- und Nachteile zu diskutieren: Annäherung des Flächeninhalts mit Rechtecken oder Trapezen, Einschachtelung „von oben“ oder „von unten“. Über das weitere Vorgehen wäre nun mit den Schülerinnen und Schülern zu diskutieren.																

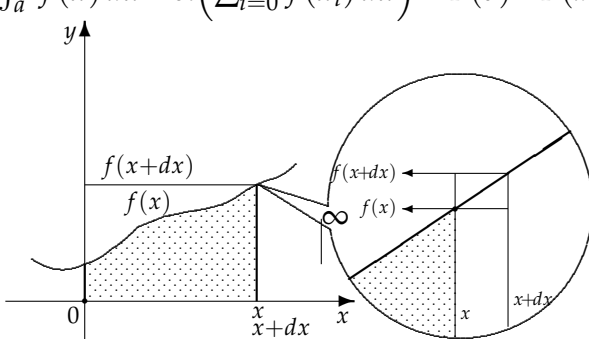
<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
Eine Annäherung an den gesuchten Flächeninhalt kann mit Rechtecken auf zwei Arten erfolgen. Im ersten Fall überdecken die Rechtecke die Parabel (<i>Obersumme</i>), ihr Flächeninhalt ist größer als der gesuchte. Im anderen Fall liegen die Rechtecke vollständig unterhalb der Parabel (<i>Untersumme</i>), ihr Flächeninhalt ist mit Sicherheit zu klein. Wegen der Krümmung der Parabel kann der Flächeninhalt auch nicht gleich dem arithmetischen Mittel der Rechtecksummen sein. 	Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Fläche mit Trapezen auszufüllen, was aber auf denselben Term für den Flächeninhalt führt. Hier wird die Berechnung bis zur variablen oberen Grenze x gezeigt. Je nach Unterrichtssituation kann auch die obere Grenze fest, zum Beispiel bei 1, gewählt werden, um zunächst die Struktur des entstehenden Terms verständlicher zu machen und Zahlenwerte ausrechnen zu können. Aus dem gleichen Grund sollte die Strecke zwischen unterer und oberer Grenze zunächst in vier gleich große Intervalle zerlegt werden. Diese Anzahl sollte man dann schrittweise auf 8, 100 usw. erhöhen, damit die Schülerinnen und Schüler verstehen, wie sich der Term dabei verändert. Am Ende wird eine infinite Anzahl N eingesetzt.

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
Der Zeichnung kann man entnehmen, dass sich <i>Untersumme</i> und <i>Obersumme</i> nur um einen Rechtecksinhalt unterscheiden, denn man kann die drei schattierten Rechtecke der <i>Untersumme</i> nach links verschieben und dann mit einem vierten Rechteck ergänzen. Berechnung der Rechtecksummen mit der Einteilung des Intervalls $[0; x]$ in vier Teile (Brüche zweckmäßigerweise nicht kürzen): Untersumme: $F_{u4} = \frac{1}{4}x \cdot \left(\frac{1}{4}x\right)^2 + \frac{1}{4}x \cdot \left(\frac{2}{4}x\right)^2 + \frac{1}{4}x \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^2$ $= \dots$ $= \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^3 i^2$ Obersumme: $F_{o4} = \dots = \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) =$ $\frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^4 i^2$	Sowohl für die Termumformungen als auch für den Umgang mit der Summenschreibweise sollte genügend Zeit eingeplant werden. Die Summenschreibweise und wie sie auszusprechen ist, ist in der Regel noch nicht bekannt. Eine der beiden Rechnungen ist eine geeignete Hausaufgabe.
<i>Erhöhung der Anzahl an Rechtecken und Berechnung des Flächeninhalts</i> Die Frage, was getan werden kann, um den Fehler in der Berechnung zu verkleinern, führt auf Zwischenschritte mit feinerer Unterteilung des Intervalls $[0; x]$, z.B. mit $n = 8$ oder $n = 100$. Danach tritt die Frage auf, ob man den Fehler zum Verschwinden bringen kann.	<i>Unterrichtsabschnitt 4</i> Die Erhöhung der Anzahl der Rechtecke dient der Übung zum Verständnis des Rechenterms. Wie sich eine feinere Unterteilung auf die Terme für Unter- und Obersumme auswirkt, finden Schülerinnen und Schüler nach kurzer Überlegung selbst heraus. Hier besteht erstmal (!) ein Unterschied zum Standardunterricht. Der

Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar
„Die Intervalle müssten unendlich schmal sein. Dann hat man aber unendlich viele Intervalle.“ Um dies sichtbar zu machen, ist der Graph mit einem infiniten Faktor zu vergrößern.  Die Quadratfunktion und somit auch die Rechtecksummen für die Unterteilung des Intervalls in infinit viele Rechtecke (Anzahl N) mit infinitesimaler Breite können wie gewohnt berechnet werden:	Vorteil ist, dass die Schülerinnen und Schüler das machen dürfen, was sie intuitiv fordern: infinit viele infinitesimal schmale Rechtecke denken. Derartige Vorschläge kommen in der Regel von den Schülerinnen und Schülern. Die Lehrerin oder der Lehrer hat hier die Möglichkeit, an die Fachbegriffe zu erinnern: Die Breite der Rechtecke ist <i>infinitesimal</i>, ihre Anzahl <i>infinit</i>. Die Unendlichkeitslupe ∞ zeigt an, dass mit einem infiniten Faktor vergrößert wird. Diese mathematisch legitimierte (Kap. 6 (Elemente 2022)) Möglichkeit bietet der Standardunterricht nicht. Mit dieser Möglichkeit der infiniten Vergrößerung kommt man nun schnell zum Hauptsatz der Analysis: Es wird die (infinite) Untersumme berechnet und anschließend nachgewiesen, dass die verbleibende Restfläche infinitesimal ist.

Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar
Untersumme: $F_{u_N} = \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (N-1)^2)$ $= \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} i^2$ Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gibt es eine Schreibweise als Produkt: $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$ Dieser Zusammenhang gilt auch für infinite n. Umwandlung der Untersumme in Produktschreibweise und Umformungen: $F_{u_N} = \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (N-1) \cdot N \cdot (2N-1)$ $= \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N} \cdot \frac{2N-1}{N}$ $= \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{N}\right)$ Hiervon ist der Standardteil zu bilden, den wir ab jetzt mit st bezeichnen. $st(F_{u_N}) = st\left(\frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{N}\right)\right)$ $= \frac{1}{3} \cdot x^3$ Dies ist eine Funktion dritten Grades, allerdings ist noch zu klären, wie groß die Fläche unter der Parabel ist, die von den Rechtecken nicht abgedeckt wird. Der unvergrößerten Zeichnung der Parabel (S. 24) wurde entnommen, dass sich Unter- und Obersumme nach der Verschiebung nur um ein Rechteck unterscheiden. (Es ist genauso groß wie die Summe aller einzelnen Differenzrechtecke.) Sein Flächeninhalt beträgt $A_{\text{Diff-R}} = f(x) \cdot dx$. Dieses Produkt ist infinitesimal, denn dx ist infinitesimal und $f(x)$ standard. Damit gibt der Standardteil der Obersumme (bzw. der Untersumme) den Flächeninhalt richtig wieder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.	Für die Obersumme erhält man $F_{o_N} = \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + N^2)$ $= \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^N i^2$ Auf einen Beweis dieser Formel (z.B. mittels vollständiger Induktion) sollte hier verzichtet werden. Denkbar sind aber Überprüfungen mit $n = 2$ bis $n = 5$. Achtung! Für die Untersumme ist die Formel umzudenken. Auch für die Obersumme erhält man als Standardteil $st(F_{o_N}) = \frac{1}{3} \cdot x^3.$ Damit ist die Flächeninhaltsfunktion errechnet. Auch die „dreieckigen“ Differenzflächen zwischen Rechtecken und Kurve sind, da sie kleiner sind, infinitesimal.

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>								
<i>Zusammenfassung aller Flächeninhaltsfunktionen, Hauptsatz der Analysis</i> <table border="1" data-bbox="245 512 878 684"> <tr> <th data-bbox="245 512 500 554">Randfunktion f</th><th data-bbox="500 512 878 554">Flächeninhaltsfunktion F</th></tr> <tr> <td data-bbox="245 554 500 596">$f(x) = 1$</td><td data-bbox="500 554 878 596">$F(x) = x$</td></tr> <tr> <td data-bbox="245 596 500 638">$f(x) = x$</td><td data-bbox="500 596 878 638">$F(x) = \frac{1}{2}x^2$</td></tr> <tr> <td data-bbox="245 638 500 680">$f(x) = x^2$</td><td data-bbox="500 638 878 680">$F(x) = \frac{1}{3}x^3$</td></tr> </table> Es scheint so zu sein, dass die Randfunktion gleich der Ableitung der Flächeninhaltsfunktion ist. Oder umgekehrt: Man findet zu einer Funktion f die Flächeninhaltsfunktion F, indem man das Ableiten der Funktion f „rückwärts vornimmt“. Gelten diese beiden Zusammenhänge immer? Falls ja, dann sind sie zu beweisen. Es gibt unendlich viele solcher Funktionen, von denen f als Ableitung „abstammen“ kann, denn zum Beispiel ist die Funktion mit $f(x) = x^2$ auch die Ableitung von $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 53$. Alle solche <i>Stammfunktionen</i> können sich nur in einem konstanten Summanden unterscheiden, der beim Ableiten wegfällt. Welche soll man nehmen? Die obere Grenze soll von nun ab nicht mehr x, sondern b genannt werden. Mit der errechneten Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ kann man den Flächeninhalt <i>unter der Parabel</i> z.B. zwischen $a = 0$ und $b = 4$ direkt angeben. Man erhält $F(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 = \frac{64}{3}$ Flächeneinheiten (FE). Wenn die untere Grenze nicht bei null liegt, sondern z.B. bei $a = 2$, dann berechnet man die Differenz zweier Flächeninhalte, nämlich $F(4) - F(2) = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$ (FE). Hier wird erkennbar, dass jede Stammfunktion geeignet ist, den Flächeninhalt zu berechnen, denn beim Bilden der Differenz fällt ein konstanter Summand wieder heraus. Der Flächeninhalt wird <i>Integral</i> genannt, weil man unendlich viele infinitesimale Rechteckinhalte zusammenfasst (<i>integriert</i>).	Randfunktion f	Flächeninhaltsfunktion F	$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$	<i>Unterrichtsabschnitt 5</i> Der Begriff „Stammfunktion“ kann hier anschaulich eingeführt werden.
Randfunktion f	Flächeninhaltsfunktion F								
$f(x) = 1$	$F(x) = x$								
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$								
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$								

Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar
Historisch hat sich eine bestimmte Schreibweise für Integrale entwickelt. Man schreibt z.B. für die Obersumme $\int_a^b x^2 dx = st \left(\sum_{i=1}^N x^2 dx \right)$ und spricht (für die linke Seite): „Integral von $f(x) = x^2$ zwischen a und b.“ Hauptsatz der Analysis 1. Die Randfunktion f ist gleich der Ableitung der Flächeninhaltsfunktion F, die den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse beschreibt: $f(x) = F'(x)$. 2. Der Inhalt der Fläche zwischen einem Funktionsgraphen, der x-Achse, der unteren Grenze a und der oberen Grenze b ist gleich der Differenz der Funktionswerte an den Stellen b und a einer Stammfunktion von f: $\int_a^b f(x) dx = st \left(\sum_{i=0}^N f(x_i) dx \right) = F(b) - F(a)$.  Beweis Teil 1 An irgendeiner Stelle x des Intervalls besitze der Flächeninhalt den Wert $F(x)$. Verschiebt man nun die obere Grenze um ein infinitesimales dx, so ändert sich der Flächeninhalt zu $F(x + dx)$. Die Veränderung beträgt also $F(x + dx) - F(x)$.	Auch andere Sprechweisen sind durchaus üblich. Im Folgenden seien a, b standard und f eine Standardfunktion. Skizze zum Hauptsatz, Teil 1 <i>Der Beweis des Hauptsatzes ist in der Nichtstandard-Analysis einfach und kurz.</i>

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
Mit infinitesimalem dx ist, genau wie der tatsächliche Flächenzuwachs, auch der Inhalt eines hinzuzufügenden Näherungsrechtecks infinitesimal: $f(x) \cdot dx$. Der verbleibende Unterschied zur tatsächlichen Fläche ist maximal ein Rechteck, von dem beide Seitenlängen dx und dy infinitesimal sind (dy kann positiv oder negativ sein). Also gilt $F(x + dx) - F(x) \simeq f(x) \cdot dx + dy \cdot dx = (f(x) + dy) \cdot dx.$ Division durch dx ergibt $\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} \simeq f(x) + dy.$ Mit dem Übergang zum Standardteil erhält man $F'(x) = f(x).$ Beweis Teil 2: Sei F_a die spezielle Stammfunktion von f, die den Flächeninhalt $\int_a^b f(x) dx$ richtig beschreibt, dass also gilt $F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(x) dx.$ Zur Beschreibung ist aber jede andere Stammfunktion F genauso geeignet, denn sie kann sich von F_a nur um eine konstante Funktion C unterscheiden, da nur konstante Funktionen beim Ableiten wegfallen: $C'(x) = 0$. Wegen $C(b) - C(a) = 0$ ergibt sich dann $\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (F_a + C)(b) - (F_a + C)(a) \\ &= F_a(b) + C(b) - (F_a(a) + C(a)) \\ &= F_a(b) + C(b) - F_a(a) - C(a) = F_a(b) - F_a(a). \end{aligned}$ Also gilt $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.	Variante mit Einschachtelung des Zuwachses: Es gilt (z.B. für monoton wachsende Funktionen) $f(x) \cdot dx \leq F(x + dx) - F(x) \leq f(x + dx) \cdot dx$. Division durch dx ergibt $f(x) \leq \frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} \leq f(x + dx),$ wovon der Standardteil zu bilden ist. Weil dieser für $f(x)$ und $f(x + dx)$ übereinstimmt, folgt die Gleichheit. In der Mitte steht der Standardteil des Differentialquotienten der Flächeninhaltsfunktion, also ihre Ableitung. Vorsicht: Division durch infinitesimales dx (s.2.3)

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
<i>Lösung des Eingangsproblems</i> Mit Hilfe eines Integrals kann also nun der Inhalt der Fläche mit gekrümmtem Rand berechnet werden. Die gesamte Fläche besteht aus einem „Dreieck“, dessen eine Seite vom Graphen von $f(x) = x^3$ gebildet wird, und einem Rechteck. Der Ursprung des Koordinatensystems sei in der Grundstücksecke an der Straße, die x-Achse die Grundstücksgrenze zur Straße. Mit der Vorgabe 10 m für 1 Einheit geht der Graph offenbar durch die Punkte (0;0) und (1;1). Es ist also das Integral $\int_0^1 x^3 dx$ zu berechnen. Man erhält damit für die dreieckige Fläche den Inhalt $A_1 = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4}, \text{ also } \frac{1}{4} \text{ Flächeneinheiten.}$ Eine Flächeneinheit entspricht $10\text{m} \cdot 10\text{m} = 100\text{m}^2$. Damit beträgt der Anteil der Fläche mit dem krummen Rand $\frac{1}{4} \cdot 100\text{m}^2 = 25\text{m}^2$. Die rechteckige Fläche ist $2\text{m} \cdot 10\text{m} = 20\text{m}^2$ groß. Somit beträgt die gesamte mit Rasen zu versehende Fläche $25\text{m}^2 + 20\text{m}^2 = 45\text{m}^2$. Es sind also mindestens 45m^2 Rollrasen zu kaufen.	<i>Unterrichtsabschluss</i>

Es folgt nun der übliche Unterricht zur Integralrechnung.

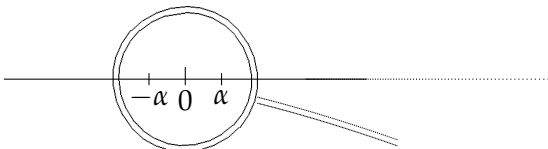
2.3 Erweiterte Arithmetik: Rechnen mit infinitesimalen und infiniten reellen Zahlen [Be]

Der folgende Unterrichtsgang beschreibt in knappen Formulierungen Schritt für Schritt die erweiterte reelle Arithmetik, soweit sie im Einstieg in die Analysis gebraucht wird. Neu „entdecken“ wir die infinitesimalen und infiniten reellen Zahlen. Den Anfang macht die *Hypothese*, die zur *Vereinbarung* wird: „Es gibt infinitesimale reelle Zahlen.“ In der *Einleitung* haben wir begründet, warum diese Vereinbarung, dieses *Axiom* sich anbietet. Die „Standardzahlen“ sind die geläufigen reellen Zahlen, so, wie wir sie kennen. Die neu entdeckten Zahlen sind „Nichtstandardzahlen“.

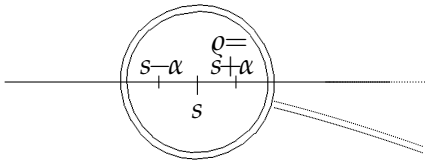
In der systematischen Weise wie in diesem Abschnitt wird man die Arithmetik im Einstieg in die Analysis kaum unterrichten. Eher wird man dort, wo der Bedarf entsteht, arithmetische Regeln erarbeiten oder lokal arithmetische Exkurse einbauen. Für beide Vorgehensweisen kann man auf diesen systematischen Unterrichtsgang zurückgreifen.

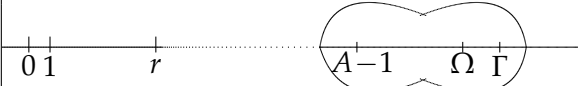
Das Rechnen mit allen reellen Zahlen ist wie gewohnt. Neu ist der genauere Blick, der neben den „Standardzahlen“ die neu entdeckten reellen Nichtstandardzahlen sieht – die infinitesimalen, infiniten und finiten Zahlen. Die Aufgabe ist, Rechenergebnisse danach zu unterscheiden. Das ist elementar. Für Schülerinnen und Schüler braucht es in manchen Phasen dennoch manches Nachdenken, manches schriftliche oder gedankliche Experiment und die Diskussion. Zentral ist: Die erweiterte reelle Arithmetik kann und soll vollständig – ausgehend von gemeinsamen, expliziten *Vereinbarungen* – mit den Schülerinnen und Schülern entwickelt werden. Besser: Sie entwickeln die *Theorie* selbst – begleitet von den Lehrenden. Auch Bezeichnungen für die neu entdeckten Zahlen sollten gemeinsam festgelegt werden, um den Vorgang der *Konvention* deutlich werden zu lassen.

Beweise werden zum gemeinsamen *Anliegen*, da sie die *eigenen* arithmetischen Sätze in der *eigenen Theorie* begründen. Die Beweise im Unterrichtsgang enthalten den Kern der Gedankenführung in einfacher Sprache und Symbolik. Sie werden sich im Unterricht aber aus der Diskussion heraus anders, lebendiger und vielfältiger, gestalten. In einem Anhang geben wir ein Beispiel eines hypothetischen Unterrichtsgesprächs zum allerersten Beweis. Der Aufbau der erweiterten reellen Arithmetik ist ein interessantes Arbeitsfeld, für Lernende wie Lehrende.

Unterrichtsgang erweiterte Arithmetik	Kommentar
<i>Einstieg: Was heißt „unendlich klein“?</i> Unendlich kleines Steigungsdreieck? Wie lang ist eine Seite? Unendlich klein? Gibt es unendlich kleine Zahlen? <i>Entdecken wir sie!</i> <i>Beobachtungen.</i> Die neu entdeckten Zahlen sollen „infinitesimal“ heißen! Eine infinitesimale Strecke kann man nicht sehen. Auch mit keiner noch so starken gewöhnlichen Lupe. Aber vorstellen kann man sie sich, so, als wenn man eine <i>Unendlichkeitslupe</i> hätte.  „Infinitesimal“ heißt „kleiner als jede geläufige positive <i>Standardzahl</i>“. Ist α infinitesimal, dann liegt α unendlich nah bei 0. „Infinitesimal“ ist nicht null, aber „kleiner als jede noch so kleine Standardzahl“. <i>Vereinbarung:</i> Infinitesimale positive Zahlen α sind größer als 0, aber kleiner als jede positive Standardzahl r. Wir schreiben $\alpha \simeq 0$. Wir bezeichnen infinitesimale Zahlen mit α, β, γ und oft auch mit dx, dy, dz usw. Infinitesimale Zahlen können auch negativ sein. Der Betrag α infinitesimaler Zahlen α ist kleiner als jede „alte“ positive Standardzahl r. Wir schreiben $\alpha \simeq 0$.	<i>Unterrichtsabschnitt 1</i> Die Idee „unendlich klein“ (> 0) entsteht z.B. bei der Beobachtung der immer kleiner werdenden Sekantendreiecke in 2.1. <i>Anlässe für Diskussionen.</i> Es genügt, zuerst nur über <i>positive</i> Zahlen zu sprechen, auch wenn sie infinitesimal sind. In (Elemente 2022, 6.2) wird die Idee der infiniten Vergrößerung <i>mathematisch legitimiert</i>. Es genügt, über <i>positive</i> infinitesimale Zahlen zu sprechen (s.o.). Die bekannten reellen Zahlen nennen wir „standard“. <i>Definition:</i> $\alpha > 0$ heißt positiv infinitesimal, wenn $\alpha < r$ für alle standard $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Wir machen durchgehend nur Bezeichnungsvorschläge. s. Abbildung α heißt infinitesimal, wenn gilt: $\alpha < r$ für alle standard $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

<i>Unterrichtsgang erweiterte Arithmetik</i>	<i>Kommentar</i>
Ist 0 eine infinitesimale Zahl? „0 ist die ‚infinitesimalste‘ Zahl.“ Vereinbarung: 0 ist infinitesimal. Frage: Gibt es infinitesimale Zahlen? Vereinbarung, Axiom: Es gibt infinitesimale Zahlen α. <i>Rechnen mit infinitesimalen Zahlen</i> Frage: Wie rechnen wir mit infinitesimalen Zahlen? Vereinbarung: Wie mit gewöhnlichen Zahlen. Wir addieren, multiplizieren, subtrahieren, dividieren, verknüpfen sie mit Standardzahlen und ordnen die Terme. Beispiele von Termen und Ausdrücken: $\alpha + \alpha, 3 \cdot \alpha, r + \alpha, n \cdot \alpha - \frac{1}{4} \cdot \beta, \alpha \cdot \alpha = \alpha^2, \frac{dy}{dx},$ $\alpha - \alpha = 0, \frac{\beta}{\beta} = 1, \alpha < \alpha + \beta.$ Frage: Wie groß ist $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$? Ist „infinitesimal + infinitesimal“ auch „infinitesimal“? Aussage: $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$ ist infinitesimal. Beweis: α ist kleiner als jedes $\frac{r}{2}$, denn $\frac{r}{2}$ ist eine Standardzahl. Also ist $2 \cdot \alpha < r$ für jedes r. Aussage: Sind α und β infinitesimal, dann ist $\alpha + \beta$ infinitesimal. Beweis: Ist z.B. $\alpha < \beta$, dann ist $\alpha + \beta < 2 \cdot \beta$, also $\alpha + \beta$ infinitesimal. Aussage: $n \cdot \alpha$ ist infinitesimal für jedes natürliche n. Beweis: α ist kleiner als jedes $\frac{r}{n}$, denn $\frac{r}{n}$ ist eine Standardzahl. Also ist $n \cdot \alpha < r$ für alle r. Satz: $s \cdot \alpha$ ist infinitesimal für alle standard s.	Diskussion! „0 ist kleiner als alle unendlich kleinen positiven Zahlen.“ Es beginnt eine <i>Theorie</i>, die gemeinsam mit den Schülern entwickelt wird. <i>Unterrichtsabschnitt 2</i> Anschaulich ist das in 2.1 begründet. Hausaufgabe? Übung? In der Praxis s. Anhang.

Unterrichtsgang erweiterte Arithmetik	Kommentar
<i>Beweis:</i> Ist $s < n$, so ist $s \cdot \alpha < n \cdot \alpha$, also infinitesimal. (Oder so: α ist kleiner als jedes $\frac{r}{s}$, r standard. Denn $\frac{r}{s}$ ist eine Standardzahl. Also ist $s \cdot \alpha < r$ für jedes r.) <i>Aussage:</i> Sind α und β infinitesimal, dann ist $\alpha \cdot \beta$ infinitesimal. <i>Beweis:</i> Da $\beta < 1$ ist, ist $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot 1 = \alpha$, also infinitesimal. <i>Frage:</i> Was ist $q = s + \alpha$, wenn s eine Standardzahl ist. <i>Antwort:</i> Keine Standardzahl. q ist eine <i>reelle Zahl</i>, die <i>infinitesimal nah</i> bei s liegt. Wir schreiben: $q \simeq s$. s heißt <i>Standardteil</i> von q. 	Dieser Beweis könnte Hausaufgabe sein. <i>Standardzahl, finite reelle Zahl, infinitesimal nah,</i> <i>Standardteil ist math. Konvention.</i>
Um jede finite Standardzahl s liegen unendlich viele infinitesimal benachbarte reelle Zahlen q. <i>Division:</i> <i>Standardzahl durch infinitesimale Zahl</i> <i>Frage:</i> Was passiert, wenn wir durch infinitesimale Zahlen dividieren? <i>Beispiel:</i> Wie groß ist $\frac{1}{\alpha}$? Wir wissen: α ist kleiner als jede Standardzahl r. Mit r ist auch $\frac{1}{r}$ eine Standardzahl. Also gilt auch $\alpha < \frac{1}{r}$ und damit durch Umformung $r < \frac{1}{\alpha}$ für alle Standardzahlen r.	<i>Unterrichtsabschnitt 3</i> α sei durchgehend infinitesimal und positiv.

Unterrichtsgang erweiterte Arithmetik	Kommentar
Entdeckung: $\frac{1}{\alpha}$ ist größer als jede Standardzahl: $\frac{1}{\alpha}$ ist <i>unendlich groß</i>. Wir sagen „infini“. Frage: Wie können wir ausdrücken, was „infini“ bedeutet? Beispiele: Infini ist größer als alle Standardzahlen. Kann jemand eine infinite Zahl nennen? Infini ist eine Zahl, die man nicht auf der endlichen Zahlengeraden darstellen kann. Aber vorstellen kann man sie sich – im Unendlichen, so, als wenn man ein <i>Unendlichkeitsfernrohr</i> hätte. Ist Ω eine infinite Zahl, dann liegt sie unendlich weit entfernt von 1 und jeder noch so großen Standardzahl r:  Vereinbarung: Unendlich große Zahlen sind größer als alle Standardzahlen r. Statt „unendlich groß“ sagen wir „infini“. Wir bezeichnen infinite Zahlen mit A, B, N, Γ, Ω, manchmal auch mit μ, ν usw. $\Omega \gg 1$ ist die Bezeichnung für „Ω ist infinit“. Aussage: Für jede Standardzahl s ist $\frac{s}{\alpha}$ <i>infini</i>. Beweis: $\frac{1}{\alpha}$ ist größer als jedes $\frac{r}{s}$, r standard. Denn $\frac{r}{s}$ ist eine Standardzahl. Also ist $\frac{s}{\alpha} > r$ für alle r. Aussage: Ist Γ infinit, dann ist $\Gamma - s$ infinit für jedes standard s.	<i>Infinite Zahlen</i> Die Idee „infini“ entsteht in 2.2 bei der unendlichen Summation von Rechtecken unter einem Funktionsgraphen. Neue Anlässe für <i>Diskussionen</i>. „Unendlichkeitsfernrohr“ Definition: Ω heißt „positiv infinit“, wenn gilt: $\Omega > 0$ und $\Omega > r$ für alle Standardzahlen. Bezeichnungsvorschläge. Zahlbezeichnungen gemeinsam vereinbaren. Übung?

Unterrichtsgang erweiterte Arithmetik	Kommentar				
<i>Hinweis:</i> Es ist Γ größer als alle Standardzahlen. Daher ist auch $\Gamma > r + s$, also $\Gamma - s > r$ für alle Standardzahlen r und s. <i>Frage:</i> Gibt es eine kleinste positiv infinite Zahl? <i>Aussage:</i> Ist Γ infinit und ist r eine Standardzahl, dann ist $r \cdot \Gamma$ infinit. <i>Rechnen mit Standard- und Nichtstandardzahlen</i> <i>Reelle Zahlen sind arithmetische Terme aus Standardzahlen, infinitesimalen und infiniten Zahlen.</i> <i>Beispiele:</i> <i>Infinitesimale Zahlen α, β wie oben.</i> <i>Infinite Zahlen A, Λ, Ω wie oben.</i> <i>Standardzahlen r, s, t, u.</i> <i>$q = r + \alpha$, eine finite reelle Zahl infinitesimal nah zu r.</i> <i>s sei standard, B infinit. Was ist $B - s$?</i> Diskutiere <i>weitere Beispiele</i> von additiven Kombinationen. Wir können diese <i>Typen reeller Zahlen</i> unterscheiden: <table border="1" data-bbox="321 1587 907 1745"> <tr> <td data-bbox="321 1587 561 1665">finite Zahlen</td><td data-bbox="561 1587 907 1665">Betrag kleiner als eine pos. Standardzahl</td></tr> <tr> <td data-bbox="321 1665 561 1745">infinite Zahlen</td><td data-bbox="561 1665 907 1745">Betrag größer als jede positive Standardzahl.</td></tr> </table> Zu den <i>finiten Zahlen</i> gehören	finite Zahlen	Betrag kleiner als eine pos. Standardzahl	infinite Zahlen	Betrag größer als jede positive Standardzahl.	<i>Diskussion!</i> Beweis als Übung. <i>Unterrichtsabschnitt 4</i> <i>infinitesimal nah</i> s. Aussage u. Hinweis in Unterrichtsabschnitt 3. Übung.
finite Zahlen	Betrag kleiner als eine pos. Standardzahl				
infinite Zahlen	Betrag größer als jede positive Standardzahl.				

Unterrichtsgang erweiterte Arithmetik					Kommentar																									
<table><tr><td>Standardzahlen r</td><td colspan="4">von denen wir ausgegangen sind.</td></tr><tr><td>infinitesimale Zahlen α</td><td colspan="4">Betrag kleiner als jede positive Standardzahl.</td></tr><tr><td>Standardzahlen + infinitesimales α</td><td colspan="4">infinitesimal nah zu einer Standardzahl</td></tr></table>					Standardzahlen r	von denen wir ausgegangen sind.				infinitesimale Zahlen α	Betrag kleiner als jede positive Standardzahl.				Standardzahlen + infinitesimales α	infinitesimal nah zu einer Standardzahl				Besser als die Prüfung der Felder ist die Herstellung der Tafeln als <i>Hausaufgabe</i> , in Einzel- oder Gruppenarbeit.										
Standardzahlen r	von denen wir ausgegangen sind.																													
infinitesimale Zahlen α	Betrag kleiner als jede positive Standardzahl.																													
Standardzahlen + infinitesimales α	infinitesimal nah zu einer Standardzahl																													
Das Rechnen mit <i>positiven</i> Standardzahlen wollen wir nach Typen ordnen. Prüfe die Felder! (Rechne linke Zahl verknüpft mit oberer Zahl!)																														
<table><tr><td>+</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>standard</td><td>infinit</td></tr><tr><td>infinites.</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>finit</td><td>infinit</td></tr><tr><td>finit</td><td>finit</td><td>finit</td><td>finit</td><td>infinit</td></tr><tr><td>standard</td><td>finit</td><td>finit</td><td>standard</td><td>infinit</td></tr><tr><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td></tr></table>					+	infinites.	finit	standard	infinit	infinites.	infinites.	finit	finit	infinit	finit	finit	finit	finit	infinit	standard	finit	finit	standard	infinit	infinit	infinit	infinit	infinit	infinit	
+	infinites.	finit	standard	infinit																										
infinites.	infinites.	finit	finit	infinit																										
finit	finit	finit	finit	infinit																										
standard	finit	finit	standard	infinit																										
infinit	infinit	infinit	infinit	infinit																										
<table><tr><td>—</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>standard</td><td>infinit</td></tr><tr><td>infinites.</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>finit</td><td>infinit</td></tr><tr><td>finit</td><td>finit</td><td>finit</td><td>finit</td><td>infinit</td></tr><tr><td>standard</td><td>finit</td><td>finit</td><td>standard</td><td>infinit</td></tr><tr><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td></td></tr></table> Frage: Warum ist das Feld „<i>infinit – infinit</i>“ leer? Begründe! Hinweis: Sei Λ infinit, r finit. Dann gibt es zwei Fälle: a) $2 \cdot \Lambda - \Lambda = \Lambda$ ist infinit, b) $(\Lambda + r)$ ist infinit und $(\Lambda + r) - \Lambda = r$ ist finit. Suche weitere Fälle!					—	infinites.	finit	standard	infinit	infinites.	infinites.	finit	finit	infinit	finit	finit	finit	finit	infinit	standard	finit	finit	standard	infinit	infinit	infinit	infinit	infinit		Spalte „finit“ ohne standard und infinitesimale Zahlen
—	infinites.	finit	standard	infinit																										
infinites.	infinites.	finit	finit	infinit																										
finit	finit	finit	finit	infinit																										
standard	finit	finit	standard	infinit																										
infinit	infinit	infinit	infinit																											
<table><tr><td>·</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>standard</td><td>infinit</td></tr><tr><td>infinites.</td><td>inf.tes.</td><td>inf.tes.</td><td>inf.tes.</td><td></td></tr><tr><td>finit</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>finit</td><td>infinit</td></tr><tr><td>standard</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>standard</td><td>infinit</td></tr><tr><td>infinit</td><td></td><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td></tr></table>					·	infinites.	finit	standard	infinit	infinites.	inf.tes.	inf.tes.	inf.tes.		finit	infinites.	finit	finit	infinit	standard	infinites.	finit	standard	infinit	infinit		infinit	infinit	infinit	Hausaufgabe, Übung?
·	infinites.	finit	standard	infinit																										
infinites.	inf.tes.	inf.tes.	inf.tes.																											
finit	infinites.	finit	finit	infinit																										
standard	infinites.	finit	standard	infinit																										
infinit		infinit	infinit	infinit																										
					Hausaufgabe, Übung.																									
					Aus Platzgründen kürzen wir hier innerhalb der Tabelle „infinitesimal“ mit „inf.tes.“ ab.																									

Unterrichtsgang erweiterte Arithmetik	Kommentar																									
Frage: Warum ist z.B. das Feld „<i>infinitesimal</i> · <i>infinit</i>“ leer? Begründe! Hinweis: dx und $dx \cdot dx$ sind infinitesimal, also $\frac{1}{dx}$ und $\frac{1}{dx \cdot dx}$ infinit. Dann ist einerseits a) $dx \cdot \frac{1}{dx} = 1$, also finit, andererseits b) $dx \cdot \frac{1}{dx \cdot dx} = \frac{1}{dx}$ infinit. Suche weitere Fälle! <table><tr><td>:</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>standard</td><td>infinit</td></tr><tr><td>infinites.</td><td></td><td>inf.tes.</td><td>inf.tes.</td><td>inf.tes.</td></tr><tr><td>finit</td><td>infinit</td><td>finit</td><td>finit</td><td>inf.tes.</td></tr><tr><td>standard</td><td>infinit</td><td>finit</td><td>standard</td><td>inf.tes.</td></tr><tr><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td></td></tr></table> Hier sehen wir wieder leere Felder. Warum ist das Feld <i>infinitesimal</i> : <i>infinitesimal</i> leer. Hinweis: dx und $dx \cdot dx$ sind infinitesimal. Dann ist einerseits a) $dx : dx = 1$, also finit, andererseits b) $dx : (dx \cdot dy) = \frac{1}{dy}$ infinit. Wir können grob, aber zutreffend, sagen, $dx \cdot dy$ ist „infinitesimaler“ als dx. Auf solche Verhältnisse muss man beim Dividieren streng achten (vgl. Hauptsatz in 2.2). Begründe, warum andere Felder leer sind! Rückblick und Ausblick Wir haben eine <i>arithmetische Theorie</i> aufgebaut.	:	infinites.	finit	standard	infinit	infinites.		inf.tes.	inf.tes.	inf.tes.	finit	infinit	finit	finit	inf.tes.	standard	infinit	finit	standard	inf.tes.	infinit	infinit	infinit	infinit		Hausaufgabe, Übung. Hausaufgabe. Hier tritt der Fall „infiniterer“ Zahlen auf. Unterrichtsabschnitt 5 Formulierung einer <i>Axiomatik</i>.
:	infinites.	finit	standard	infinit																						
infinites.		inf.tes.	inf.tes.	inf.tes.																						
finit	infinit	finit	finit	inf.tes.																						
standard	infinit	finit	standard	inf.tes.																						
infinit	infinit	infinit	infinit																							

<i>Unterrichtsgang erweiterte Arithmetik</i>	<i>Kommentar</i>
Wie sind wir vorgegangen? Was waren unsere <i>Grundsätze</i>? 1. Wir gingen aus von der <i>Theorie der reellen Zahlen</i> $\mathbb{R}$. 2. Wir entdeckten <i>infinitesimale reelle Zahlen</i> α, β, dx usw. und <i>infinite</i> Zahlen sowie 3. in $\mathbb{R}$ entstandene arithmetischen Terme, die wir nach standard, finit, infinitesimal, infinit und nichtstandard ordneten. 4. Die arithmetischen Aussagen und Regeln für Standardzahlen gelten in ganz $\mathbb{R}$. Für die <i>Anwendung in der Analysis</i> sind wichtig: 5. Jede finite Zahl q besitzt einen <i>Standardteil</i> r mit $q \simeq r$. 6. Wir denken uns die standard Relationen und Funktionen auf $\mathbb{R}$ <i>fortgesetzt</i>.	<i>Vereinbarung, Axiom</i> <i>Transfer</i> s. 2.1 und 2.2 <i>Standardteil</i> <i>Transfer</i>

Liste der Zahlbezeichnungen,

die wir hier und in den anderen Unterrichtsskizzen sukzessive vorgeschlagen haben.

Die Standardzahlen bezeichnen wir wie die geläufigen reellen Zahlen. Für die „neu entdeckten“ reellen Zahlen schlagen wir vor, wie folgt vorzugehen. Wir bezeichnen

- infinitesimale Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben aus dem Anfang des Alphabets,
- finite Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben aus der zweiten Hälfte des Alphabets, Ausnahmen $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu$,
- infinite Zahlen mit großen griechischen Buchstaben, die sich möglichst von den lateinischen Großbuchstaben unterscheiden. Zusätzlich $\iota, \mu, \nu, \kappa, \lambda$, z.B. als infinite Indizes in der Verbindung mit natürlichen Laufindizes i, m, n, k, l .

Liste:

infinitesimale Zahlen	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega, dx, dy, ds, dt$
finite Zahlen für Variable	$\vartheta, \varrho, \sigma, \tau,$ η, ξ, ζ
infinite Zahlen aber auch	$\Gamma, \Lambda, \Pi, \Phi, \Omega$ $\iota, \mu, \nu, \kappa, \lambda$

Wichtig ist, dass Bezeichnungen vereinbart werden, die das Lesen erleichtern. Die Vereinbarungen können auch völlig anders aussehen.

2.3.1 Ein Beweis im Unterrichtsgespräch [F]

so, wie es sich zwischen Lehrerin/Lehrer (L) und Schülerinnen/Schülern (S) zutragen könnte – vielleicht etwas idealisiert?

Beweis der Aussage: $\alpha + \alpha = 2\alpha$ ist infinitesimal, wenn α infinitesimal ist.

L. (blickt auf Ausschnitt der Zahlengerade – vgl. 2.1): „Wir sehen auf dem Ausschnitt der Zahlengerade, wie die Infinitesimalien um die 0 herum liegen – und nirgendwo ist eine weitere Standardzahl außer 0 zu sehen. Wo liegt denn eigentlich $\alpha + \alpha = 2\alpha$ oder $\alpha + \beta$?“

S: „Ist doch klar: auch in diesem Ausschnitt, nur weiter rechts von α bzw. β !“

L: „Anschaulich ist das klar – aber können wir das auch mathematisch beweisen? Können wir nur mit den bekannten Eigenschaften von Infinitesimalien nachweisen, dass auch 2α und $\alpha + \beta$ in dem Ausschnitt liegen?“

S: „Wozu das denn? Ist doch klar! Sieht doch jeder!“

L: „Manchmal trügt aber auch der Schein und man lässt sich dadurch leicht verleiten, etwas für richtig zu halten, was aber in Wahrheit gar nicht richtig ist. Deshalb muss in Mathe eine Aussage bewiesen werden.“

S: „Also gut! Aber wie soll das denn gehen? Was müssen wir denn tun?“

L: „Naja, nehmen wir die erste Aussage: 2α soll auch in dem Ausschnitt der Zahlengerade um die 0 herum liegen, also 2α soll auch infinitesimal sein, wenn α infinitesimal ist. – Was heißt das?“

S: „Doch wohl, dass 2α kleiner ist als jede positive Standardzahl r .“

L: „Genau! Das müssen wir zeigen!“

S: „Aber das geht doch gar nicht: α ist doch schon kleiner als r , dann ist 2α doch nur kleiner als $2r$ und nicht kleiner als r ! Also stimmt das gar nicht, was wir beweisen wollen!“

L: „Moment! Nicht so schnell! – 2α soll kleiner als r werden. Dabei ist r eine beliebig kleine positive Standardzahl, die wir uns jetzt mal fest vorgeben; r ist also beliebig, aber fest – so sagt man!“

S: „Ja, aber dann ist 2α trotzdem nicht kleiner als r , sondern nur kleiner als $2r$, wenn α kleiner ist als r .“

L: „Da hast du Recht! Aber muss denn α kleiner als r sein?“

S: „Steht doch da (liest vor): ‚Eine infinitesimale Zahl α ist kleiner als jede positive Standardzahl r .‘ – und nur das sollen wir doch bei dem Beweis verwenden.“

L: „Genau! α ist kleiner als jede positive Standardzahl – das ist die wichtige Aussage. Aber muss diese Zahl denn unbedingt r sein? Doch wohl nicht. Es muss nicht die Zahl r sein, die wir oben beliebig, aber fest vorgegeben haben. Es kann auch irgendeine andere positive Standardzahl, z.B. s , sein.“

S: „Also kann ich dieses s ja auch kleiner oder größer als das feste r wählen.“

L: „Du hast es erfasst! Welcher Wert für s würde uns denn gut im Beweis passen?“

S: „ $\frac{r}{2}$ oder noch kleiner. $\frac{r}{2}$ würde reichen: diese Zahl ist auf jeden Fall auch standard und positiv, und wenn wir $\alpha < \frac{r}{2}$ wählen – das dürfen wir ja, wie wir oben gehört haben –, dann ist $2\alpha < 2 \cdot \frac{r}{2} = r$.“

L: „Super! Jetzt sind wir fertig und die obige Aussage ist nicht nur anschaulich klar, sondern auch mathematisch bewiesen.“

S: „Keiner kann uns mehr was!“

Kapitel 3

Grundlagenaspekte und historische Bezüge [Ku]

Bereits im Vorwort haben wir angekündigt, dass wir in dieser Auflage infinitesimale Zahlen in $\mathbb{R}$ *entdecken*, anstatt sie, wie in den Auflagen zuvor, zu *erfinden* und als hyperreelle Zahlen den reellen Zahlen hinzuzufügen. Trotz dieses ungewohnten und für viele wohl überraschenden Perspektivwechsels ändert sich an der praktischen Anwendung infinitesimaler Zahlen wenig. Davon konnten wir uns in Kapitel 2 überzeugen. Dennoch bringen infinitesimale reelle Zahlen (und dadurch bedingt infinite natürliche Zahlen) besondere Herausforderungen mit sich, speziell für ausgebildete Mathematiker, die doch die reellen Zahlen (und erst recht die natürlichen Zahlen) vollständig zu kennen glauben. Wie könnte man da noch Neues entdecken? In diesem Kapitel gehen wir genauer auf diese Herausforderungen ein und stellen zudem einige historische Bezüge zu Leibniz' Infinitesimalkalkül her. Diese Informationen sollen in erster Linie den Lehrenden als Hintergrund dienen.

3.1 Die reellen Zahlen (aus der Sicht der Lehrenden)

Woher kommt die Gewissheit, mit der wir die reellen Zahlen zu kennen glauben?

Zum einen aus der scheinbaren Nähe zu unserer Anschauung und unserer Erfahrung mit kontinuierlichen Vorgängen in Raum und Zeit. Wenn wir die reellen Zahlen mit den Punkten einer Geraden identifizieren, glauben wir, sie quasi „vor uns zu sehen“. Doch was wir tatsächlich *sehen*, ist ein Strich,

und was wir denken, ist eine gerade Linie, die nicht endet. Weder unsere Erfahrung, noch unsere Anschauung können eine unendliche Gerade als *Ganzes* erfassen, geschweige denn, zu einer Punktmenge auflösen.

Die zweite Quelle unserer Gewissheit ist theoretischer Natur. Wenn wir Mathematik studiert haben, erinnern wir uns vielleicht daran, was wir in Einführungskursen zur Analysis über die reellen Zahlen gelernt haben, nämlich, dass sie einen *vollständig angeordneten Körper* bilden, dass sie also gewisse *Axiome* erfüllen, und dass sie darüber hinaus durch diese Axiome (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt sind. Es gibt also im Wesentlichen *genau einen* vollständig angeordneten Körper, den der reellen Zahlen.

Zwei wichtige Folgerungen aus den Axiomen sind, dass die reellen Zahlen die *archimedische Eigenschaft* haben (das heißt, keine reelle Zahl ist größer als alle natürlichen Zahlen) und zweitens, dass jede reelle Zahl, außer 0, eine eindeutig bestimmte unendliche Dezimalbruchentwicklung hat. Die periodischen Dezimalbruchentwicklungen gehören zu den rationalen Zahlen, die verbleibenden zu den irrationalen Zahlen. Diejenigen reellen Zahlen, bei denen die Dezimalbruchentwicklung eine Periode 9 hat, haben eine alternative, *endliche* Dezimalbruchdarstellung. Dieser Zusammenhang zwischen reellen Zahlen und unendlichen Dezimalbrüchen wird in der Regel auch in der Schule vermittelt.

Anschaulich „findet“ man die Dezimalbruchentwicklung einer positiven reellen Zahl r , indem man, ausgehend von der durch die ganzen Zahlen eingeteilten Zahlengeraden, die Intervalle fortgesetzt zehntelt und in jedem Schritt die links von r nächstgelegene Intervallgrenze wählt. Für negative reelle Zahlen wählt man jeweils die rechts von r nächstgelegene Intervallgrenze. Mit jedem Schritt wird der Dezimalbruchentwicklung von r so eine Stelle hinzugefügt. Die Anführungszeichen bei „findet“ sind angebracht, da dieser Prozess niemals endet, und eine Dezimalbruchentwicklung auf diese Weise nicht anschaulich, sondern nur in einer *Theorie*, die das aktual Unendliche einschließt, existiert. Dennoch erweckt die Feststellung, dass die reellen Zahlen (ohne 0) eins zu eins den unendlichen Dezimalbrüchen entsprechen, leicht den Eindruck, es bliebe kein Spielraum für Entdeckungen. Dieser Eindruck täuscht.

3.2 Der Aufbau des Zahlensystems

Wenn wir sagen, dass es (bis auf Isomorphie) nur einen vollständig angeordneten Körper gibt, so ist dies ein Satz der *Mengenlehre*, zum Beispiel auf der Basis des Zermelo-Fraenkel'schen Axiomensystems, abgekürzt ZF (bzw. ZFC, wenn man das Auswahlaxiom hinzunimmt). Die Axiome brauchen wir hier nicht im Detail zu erörtern. Es genügt festzuhalten, dass ZFC eine

reine Mengenlehre ist (alle Dinge, von denen sie handelt, sind Mengen) und den Aufbau der üblichen Mathematik erlaubt, insbesondere den Aufbau des Zahlensystems. Das bedeutet, dass alle Definitionen und Sätze der üblichen Mathematik in der Sprache der Mengenlehre formulierbar sind. Im Prinzip stehen hierfür nur das Relationssymbol $\in$ („ist Element von“), Variablen, Klammern und logische Symbole zur Verfügung. Mit diesen Symbolen bildet man (nach bestimmten syntaktischen Regeln) sogenannte $\in$ -Ausdrücke. Letztlich sind also alle konventionellen mathematischen Begriffe durch $\in$ -Ausdrücke definiert und alle konventionellen mathematischen Aussagen $\in$ -Ausdrücke.

Ausgangspunkt des mengentheoretischen Aufbaus des Zahlensystems ist die induktive Menge ω , die mit der Menge der natürlichen Zahlen gleichgesetzt wird. In ZF heißt eine Menge M *induktiv*, wenn $\emptyset \in M$ und für alle $x \in M$ auch $x \cup \{x\} \in M$ ist. Daher enthält eine induktive Menge mindestens die Elemente $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ und so weiter, wobei jedes Glied dieser Folge die Menge seiner Vorgänger ist. Dass es induktive Mengen gibt, sichert in ZF das Unendlichkeitsaxiom. Die Menge ω wird dann (mit dem Aussonderungsaxiom) als die Menge definiert, die genau die Elemente enthält, die Element *jeder* induktiven Menge sind. In diesem Sinne ist ω die kleinstmögliche induktive Menge. Sie bildet mit der leeren Menge $\emptyset$ als Null und der Operation $\sigma: x \mapsto x \cup \{x\}$ als Nachfolgeroperation eine *Peano-Struktur*, das heißt, sie erfüllt die (mengentheoretisch formulierten) Peano-Dedekind'schen Axiome der natürlichen Zahlen. Die ersten Elemente von ω lassen sich dann als $\emptyset, \sigma\emptyset, \sigma\sigma\emptyset, \sigma\sigma\sigma\emptyset, \dots$ oder, etwas vertrauter, als $0, 1, 2, 3, \dots$ schreiben. Nach dem Satz von Dedekind sind alle Peano-Strukturen isomorph, sodass es unerheblich ist, welche wir zur Definition der natürlichen Zahlen heranziehen. Wir schreiben im Folgenden $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen (inklusive 0).

Danach folgt der Aufbau des Zahlensystems einem ähnlichen Pfad, wie man ihn (wenn auch wesentlich informeller) mit den verschiedenen Zahlbereichserweiterungen in der Schule geht. Für den Schritt von den rationalen zu den reellen Zahlen gibt es verschiedene Möglichkeiten, zum Beispiel Dedekind'sche Schnitte, Cauchy-Folgen oder Intervallschachtelungen.

3.3 Die reellen Zahlen in ungewohntem Licht

In der mathematischen Literatur nennt man Elemente eines angeordneten Körpers *unendlich groß*, wenn sie größer als alle natürlichen Zahlen sind. Die Kehrwerte der unendlich großen Körperelemente nennt man dementsprechend *unendlich klein*.

Die archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen schließt unendlich große

und unendlich kleine reelle Zahlen aus. Keine reelle Zahl ist größer als *alle* natürlichen Zahlen. Wenn wir also Analysis mit infinitesimalen Zahlen *in* $\mathbb{R}$ betreiben wollen, dann dürfen wir *infinitesimal* nicht als *unendlich klein* definieren. Andererseits sollen Infinitesimalien kleiner als jede konkret angebbare Zahl, insbesondere kleiner als $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ sein. Wie kann das gehen? Offenbar nur, indem wir annehmen, dass $\mathbb{N}$ Zahlen enthält, die größer als $1, 2, 3, \dots$ sind, denn für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 < x < \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > 1, 2, 3, \dots,$$

und $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt. Folglich gibt es dann auch natürliche Zahlen, die größer als $\frac{1}{x}$ und damit größer als $1, 2, 3, \dots$ sind.

Wir müssen also in Erwägung ziehen, dass $\mathbb{N}$ so aussehen könnte:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \nu - 1, \nu, \nu + 1, \nu + 2, \dots\}. \quad (3.1)$$

Dabei soll ν eine Zahl sein, die größer ist als alle Zahlen, die durch fortgesetzte Nachfolgerbildung aus 0 entstehen, oder – anders ausgedrückt – größer als alle Einsensummen. $\mathbb{N}$ enthält dann auch die Zahlen $\nu - 1, \nu - 2, \nu - 3$ und so weiter, denn jede Zahl außer 0 hat in $\mathbb{N}$ einen Vorgänger.

Ist so etwas denkbar? Folgender Einwand liegt nahe: Wenn man in (3.1) die Menge $\mathbb{N}$ *nach* den Zahlen, die sich durch fortgesetzte Nachfolgerbildung aus 0 ergeben, und *vor* den Zahlen, die man so nicht erreicht, auftrennt, dann wäre der vordere Teil immer noch induktiv, und dies würde der Aussage widersprechen, dass $\mathbb{N}$ definitionsgemäß die kleinstmögliche induktive Menge ist.

Man müsste dazu allerdings das „Auftrennen“ von $\mathbb{N}$ in der Sprache der Mengenlehre beschreiben, also einen $\in$ -Ausdruck $\varphi(x)$ angeben, der die Elemente des „vorderen Teils“ charakterisiert. Dann könnte man nach dem Aussonderungssaxiom die Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid \varphi(x)\}$ bilden.

Hier liegt das Problem des Einwandes, denn es ist nicht klar, ob die benötigte Eigenschaft der Mengenlehre überhaupt zugänglich ist. Um auszudrücken, dass eine Zahl durch wiederholte Nachfolgerbildung aus 0 entsteht, mengentheoretisch also durch wiederholte Anwendung der Operation σ auf $\emptyset$, bedient man sich der so genannten *Metasprache*, also der Sprache, in der man über Konstrukte (Symbole, Terme, Ausdrücke) der betrachteten formalen Sprache (die in diesem Zusammenhang *Objektsprache* heißt) spricht. Man muss demzufolge die naiven, metasprachlichen natürlichen Zahlen, mit denen man zum Beispiel zählt, wie oft ein bestimmtes Zeichen in einem $\in$ -Ausdruck vorkommt, von den theoretischen, objektsprachlichen natürlichen Zahlen in ZF (also den Elementen von ω) unterscheiden. Zwar gibt es zu jeder metasprachlichen natürlichen Zahl eine entsprechende objektsprachliche

(die definiert werden kann, indem man σ entsprechend oft auf $\emptyset$ anwendet). Die Umkehrung bleibt jedoch offen, weshalb (3.1) nicht auszuschließen ist.

3.4 Das Axiomensystem SPOT

Wenn (3.1) nicht ausgeschlossen ist, dann steht es uns frei, Erweiterungen von ZF zu untersuchen, die (3.1) bestätigen. Um eine solche Erweiterung handelt es sich bei dem von Hrbáček und Katz vorgestellten Axiomensystem SPOT, dessen Name sich von den ZF hinzugefügten Axiomen **SP** (Standard Part), **O** (Nontriviality) und **T** (Transfer) ableitet. Sie ist der theoretische Hintergrund und die mathematische Rechtfertigung für das, was wir in dieser Handreichung vorstellen.

Der Sprache der Mengenlehre wird ein *undefiniertes* einstelliges Relationsymbol st („standard“) hinzugefügt, mit dem es möglich wird, über eine in ZF nicht zugängliche Eigenschaft von Mengen zu sprechen. Die Ausdrücke der erweiterten Sprache sind also im Allgemeinen $st \in$ -Ausdrücke und, sofern sie das neue Symbol st nicht enthalten, $\in$ -Ausdrücke. Wie üblich wird die Sprache in der Praxis noch um *definierte* Symbole erweitert, die Ausdrücke kürzer und verständlicher machen. Solche Erweiterungen können aber prinzipiell wieder eliminiert werden.

Da in ZF Zahlen als bestimmte Mengen definiert werden, ist die folgende Definition möglich, die wir bereits in Kapitel 2 verwendet haben.

Definition 1. Eine reelle Zahl heißt

- *finit*, wenn ihr Betrag kleiner-gleich einer natürlichen Standardzahl ist (äquivalent: kleiner-gleich einer reellen Standardzahl);
- *infin*, wenn sie nicht finit ist;
- *infinitesimal*, wenn ihr Betrag kleiner als der Kehrwert jeder positiven natürlichen Standardzahl ist (äquivalent: wenn ihr Betrag kleiner als alle positiven reellen Standardzahlen ist).¹

Zwei reelle Zahlen x und y heißen *infinitesimal benachbart* ($x \simeq y$), wenn ihre Differenz infinitesimal ist. Wenn x positiv unbeschränkt ist, schreibt man $x \gg 1$.

¹Wir haben in dieser Handreichung die Begriffe *finit* und *infin* aus den bisherigen Auflagen übernommen, allerdings mit einer geänderten Bedeutung, da sie sich hier auf reelle Zahlen beziehen und nicht das gleiche bedeuten wie *endlich* bzw. *unendlich groß* (siehe Erläuterung zu Beginn von Abschnitt 3.3). Im Englischen verwendet man daher stattdessen die Begriffe *limited* bzw. *unlimited*, um sie von den englischen Begriffen *finite* (endlich) und *infinite* (unendlich) abgrenzen zu können.

Das Axiomensystem SPOT umfasst alle Axiome von ZF. Diese werden unverändert übernommen, was insbesondere bedeutet, dass das Axiomenschema der Aussonderung nur für $\in$ -Ausdrücke gefordert wird. Damit existiert zu jedem $\in$ -Ausdruck φ für alle Mengen A die Menge $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$. Dies gilt jedoch im Allgemeinen nicht für $\text{st-}\in$ -Ausdrücke. Auf der anderen Seite bedeutet die unveränderte Übernahme der ZF-Axiome:

- Alle in ZF bewiesenen Sätze gelten auch in SPOT.
- Alle in ZF gemachten Definitionen sind unverändert auch in SPOT verwendbar.

Die zusätzlichen Axiome von SPOT sind die folgenden:

T (Transfer) Sei φ ein $\in$ -Ausdruck (eventuell mit Standardparametern). Wenn $\varphi(x)$ für alle standard x gilt, dann gilt $\varphi(x)$ für alle x .

O (Nontriviality) Es gibt Nichtstandardzahlen in $\mathbb{N}$.

SP (Standard Part) Jede finite reelle Zahl ist infinitesimal benachbart zu einer reellen Standardzahl.

Die zu einer finiten reellen Zahl x infinitesimal benachbarte Standardzahl ist eindeutig bestimmt und wird der *Standardteil* (engl. *standard part*) von x genannt.

Aus dem Transferaxiom folgt unter anderem, dass alles, was man in ZF (eventuell mit Standardparametern) definieren kann, standard ist.² Da demzufolge zum Beispiel alle Einsensummen standard sind, $\mathbb{N}$ gemäß Axiom **O** aber auch Nichtstandardzahlen enthält, finden wir die Darstellung (3.1) bestätigt. Zugleich bleibt die in ZF bewiesene Aussage gültig, dass $\mathbb{N}$ die kleinstmögliche induktive Menge ist, denn die Mengenbildung $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{st}(x)\}$ ist in SPOT nicht möglich, da das Aussonderungsaxiom, wie in ZF, nur für $\in$ -Ausdrücke anwendbar ist. Ein solcher „illegaler Mengenterm“ ist ebenso wenig definiert, wie der „illegale Bruch“ $\frac{1}{0}$.

Eine der größten Herausforderungen für die Akzeptanz von SPOT (und verwandten Nichtstandarderweiterungen von ZF oder ZFC) ist sicherlich die Konsequenz, dass man augenscheinlich Unendliches, wie die potentiell unendliche Abfolge aller Einsensummen $1, 2, 3, \dots$ zu einer endlichen Menge $\{1, \dots, \nu\}$ ergänzen kann, und das, obwohl man weder die Definition der natürlichen Zahlen, noch die Definition von *endlich* verändert hat. Der Grund für diese geradezu paradox anmutende Konsequenz ist, dass man die

²Wendet man Axiom **T** auf die Negation von φ an, folgt: Wenn $\varphi(x)$ für (mindestens) ein x gilt, dann gilt $\varphi(x)$ für (mindestens) ein standard x . Wenn also x durch $\varphi(x)$ *eindeutig* bestimmt ist, so ist x standard.

naiven natürlichen Zahlen der Metasprache und die *theoretischen* natürlichen Zahlen der Objektsprache auseinanderhalten muss. Die Unterscheidung der Sprachebenen ist auch in ZF notwendig, fällt aber dort nicht auf und ist daher kaum bewusst. Wer empfindet schon die Notwendigkeit eines Beweises der Aussage, dass die Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist?

3.5 Die reellen Zahlen (aus der Sicht der Lernenden)

Kinder haben Phantasie. Sie haben keine Schwierigkeiten, sich imaginäre Freunde, rosa Elefanten oder unendlich große Zahlen auszudenken. Sich Dinge ausdenken heißt, sich vorstellen, dass es diese Dinge gibt, auch wenn man (noch) keinen Beleg für ihre Existenz hat. Was in der Mathematik ausgedacht ist und was nicht, ist eine tiefe philosophische Frage, die aber durchaus mit Schülern diskutiert werden kann, und zwar ohne die Erwartung, bestimmte Positionen als richtig und andere als falsch zu erkennen. Sind die reellen Zahlen ausgedacht? Oder bereits die rationalen Zahlen, die negativen Zahlen, die natürlichen Zahlen? Hier keine eindeutigen Antworten zu haben, bedeutet nicht, dass die Mathematik im Chaos versinkt. Wichtiger als die Frage, ob Dinge ausgedacht sind oder nicht, ist in der Mathematik die Frage, was wir mit den Dingen machen können, ob wir sie zum Beispiel vergleichen können, ob wir mit ihnen rechnen können und wenn ja, wie?

Was könnte eine unendlich große Zahl sein? Auch diese Frage kann man mit Schülern diskutieren. Die oben angegebene mathematische Konvention, eine Zahl unendlich groß zu nennen, wenn sie größer als alle natürlichen Zahlen ist, entspricht nicht unbedingt der Intuition von Schülern, denn sie setzt voraus, dass man bereits weiß, was *alle natürlichen Zahlen* bedeutet. Könnten aber nicht bereits natürliche Zahlen unendlich groß sein, nämlich größer als $1, 2, 3, \dots$, größer als jede Zahl, die wir durch Zählen erreichen können, größer als jede Einsensumme? Solche Fragen sind nicht unberechtigt und wurden bereits im 17. Jahrhundert von großen Mathematikern, wie Leibniz und Bernoulli, kontrovers diskutiert. Wenn es solche Zahlen gäbe und sie ansonsten alle Eigenschaften der bekannten natürlichen Zahlen hätten, sollte man sie dann nicht auch natürliche Zahlen nennen, so wie man rosa Elefanten weiterhin Elefanten nennen würde, wenn sie (außer der Farbe) alle Eigenschaften der bislang bekannten Elefanten haben?

Das *Entdecken* „unendlich großer“ natürlicher Zahlen ist das Entdecken der Möglichkeit ihrer Existenz und die Bereitschaft, von dieser Möglichkeit Gebrauch zu machen. Dies ist mathematisch vollkommen legitim, wie die oben skizzierte Theorie SPOT zeigt. Der Trick, um über die neu entdeckten

Zahlen sprechen zu können, bestand darin, einen neuen Begriff „standard“ einzuführen und die natürlichen Zahlen in Standard- und Nichtstandardzahlen einzuteilen. Wir können die Nichtstandardzahlen weder durch Zählen erreichen, noch mit Dezimalziffern hinschreiben. Wenn wir diese Zahlen nutzen wollen, müssen wir gleichsam in Gedanken zu ihnen *springen* und zu ihrer Bezeichnung Buchstaben als Platzhalter verwenden. Das schmälert nicht ihre Nützlichkeit, denn es wird in Anwendungen niemals darauf ankommen, eine eindeutig bestimmte Nichtstandardzahl zu benennen. Es wird stets genügen zu wissen, dass es welche gibt und dass man mit ihnen wie mit Standardzahlen umgehen kann.

Die natürlichen Nichtstandardzahlen sind größer als jede natürliche Standardzahl und damit größer als jede Einsensumme, in einem intuitiven Sinne also „unendlich groß“. Solche Zahlen haben wir in dieser Handreichung *infini*t genannt, um eine möglichst große Analogie zur Auflage 2 vor dem Hintergrund der hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$ zu erreichen.

Hat man die infiniten natürlichen Zahlen entdeckt, so ergibt sich alles Weitere ganz natürlich. Hier bietet sich eine faszinierende Möglichkeit, den Aufbau des Zahlensystems noch einmal im Schnelldurchgang zu wiederholen und dabei zu beobachten, wie sich das Wissen um die Existenz infiniten natürlicher Zahlen auswirkt. An den *bekannten* Eigenschaften der Zahlen (also an den Eigenschaften, die sich ohne den Begriff *standard* formulieren lassen) ändert sich dabei nichts.

- Spiegelbildlich zu den positiven hat man die negativen ganzen Zahlen. Auch diese können *infini*t (und damit nicht *standard*) sein.
- Als Verhältnis zweier ganzer Zahlen, von denen die zweite ungleich null ist, erhält man die rationalen Zahlen. Unter ihnen gibt es sowohl *infinite*, als auch *infinitesimale*. Eine rationale Zahl ist *standard*, wenn sie als Verhältnis zweier Standardzahlen darstellbar ist. Zwischen zwei verschiedenen rationalen Standardzahlen liegen stets auch rationale Nichtstandardzahlen. Diese sind dann zwangsläufig *finit*. Zwei rationale Zahlen können verschieden und dennoch *infinitesimal* benachbart sein.
- Der herausfordernde Schritt von den rationalen zu den reellen Zahlen bleibt unverändert. Je nach Herangehensweise werden reelle Zahlen durch bestimmte rationale Folgen (Cauchy-Folgen), Dedekind'sche Schnitte in $\mathbb{Q}$ oder rationale Intervallschachtelungen definiert. Hat man die reellen Zahlen anschaulich als „Punkte der Zahlengerade“ eingeführt, so ändert sich die Kontinuumsvorstellung dahingehend, dass man Punkte mit *infinitem* oder *infinitesimalem* Abstand einbeziehen muss (wie es Leibniz bereits getan hat).

Der Vorteil dieses Zugangs ist, dass infinite und infinitesimale Zahlen bereits in $\mathbb{Q}$ (und damit automatisch in $\mathbb{R}$) vorhanden sind. Sie müssen nicht erst als neue Zahlen „konstruiert“ und den (ohnehin schwierigen) reellen Zahlen hinzugefügt werden. Der Nachteil (wenn man es überhaupt als Nachteil sehen will) ist, dass man schon mit den natürlichen Zahlen über das naive Zählen hinaus einen Schritt in die *Theorie* gehen muss, um infinite natürliche Zahlen entdecken zu können. Intuitiv sind diese Zahlen „unendlich groß“.

Wir gehen noch auf den Zusammenhang zwischen den reellen Zahlen und den unendlichen Dezimalbrüchen genauer ein. Wie oben erwähnt, kann man die reellen Zahlen (ohne die Null) umkehrbar eindeutig den unendlichen Dezimalbrüchen zuordnen. Diese Aussage bleibt richtig (so, wie alle in ZF beweisbaren Aussagen), und sie führt jetzt deutlich vor Augen, dass unendliche Dezimalbrüche, genau genommen, sehr abstrakte Objekte sind, nämlich (im positiven Fall) unendliche rationale Folgen der Gestalt

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

wobei a_0 aus $\mathbb{N}$ und die restlichen a_k aus $\{0, \dots, 9\}$ sind. Unendliche rationale Folgen sind nichts anderes als Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$. Man beachte aber, dass a_0 infinit sein kann, und dass n *alle* natürlichen Zahlen (also auch die infiniten) durchläuft.

Für konkrete in der Analysis auftretende Irrationalzahlen, wie $\sqrt{2}$ oder π , können die Dezimalbruchentwicklung algorithmisch beschrieben und die Folgenglieder *potentiell* unendlich weit ausgerechnet werden. Der unendliche Dezimalbruch als Ganzes ist aber ein *theoretisches Objekt* und bleibt unerreichbar.

3.6 Ein historischer Vergleich

In der heutigen Mathematik sind aktual unendliche Mengen eine Selbstverständlichkeit, während uns infinite oder infinitesimale Zahlen ungewohnt oder sogar paradox erscheinen. Historisch betrachtet war es lange Zeit genau umgekehrt. Leibniz lehnte aktual unendliche Gesamtheiten als widersprüchlich ab, da sie das euklidische Axiom „Das Ganze ist größer als der Teil“ verletzen. Er hielt aber *inassignable Größen* – Größen, die größer bzw. kleiner als jede angebbare (*assignable*) Größe sind – für nützliche Fiktionen, „da sie Abkürzungen des Redens und Denkens und daher des Entdeckens ebenso wie des Beweisens liefern“.

Abraham Robinson hat bereits drauf hingewiesen, dass Leibniz’ Kontinuitätsprinzip, nach dem die Regeln des Endlichen auch im Unendlichen

Tabelle 3.1: Ein Vergleich SPOT / Leibniz

SPOT	Leibniz
Neues Prädikat <i>standard</i>	Unterscheidung assignabler und inassignabler Größen
Axiom T (Transfer): Ein $\in$ -Ausdruck (mit Standardparametern), der für alle <i>standard</i> x gilt, gilt für alle x .	„...und es stellt sich heraus, dass die Regeln des Endlichen [auch] im Unendlichen erfolgreich [anzuwenden] sind ... und dass <i>umgekehrt</i> die Regeln des Unendlichen [auch] im Endlichen erfolgreich [anzuwenden] sind“ (Brief an Varignon vom 2.2.1702)
Axiom O (Nontriviality): Es gibt Nichtstandardzahlen in $\mathbb{N}$.	„Und es kommt nicht darauf an, ob es derartige Quantitäten in der Natur der Dinge gibt, denn es reicht aus, sie durch eine Fiktion einzuführen.“ (1676, De Quadratura)
Axiom SP (Standard Part): Jede beschränkte reelle Zahl ist infinitesimal benachbart zu einer reellen Standardzahl.	„Im Übrigen glaube ich, dass nicht nur dasjenige gleich ist, was keinerlei Differenz hat, sondern auch das, dessen Differenz unvergleichbar klein ist, ...“ (1695, Responsio ad nonnullas difficultates)

erfolgreich anwendbar sind (und umgekehrt), eine bemerkenswerte Nähe zum Transferprinzip seiner Nonstandard-Analysis hat.

In Tabelle 3.1 stellen wir die Axiome von SPOT typischen Leibniz-Zitaten gegenüber. Angesichts der vergleichsweise einfachen axiomatischen Erweiterung durch SPOT und der Nähe zu vorhandenen historischen Ansätzen, ist es eine inspirierende, wenn auch spekulative Frage, ob die Formalisierung der Analysis einen anderen als den tatsächlichen Verlauf hätte nehmen können.

Kapitel 4

Richtlinien, Aufgaben, Abitur

4.1 Lehrplanvorgaben der Bundesländer [Ba]

Immer wieder fragen Lehrerinnen und Lehrer, die die Vorzüge der Nichtstandardanalysis erkannt haben und auf diese Weise nun unterrichten wollen, ob dies denn die Rahmenlehrpläne zulassen. Nach dem aktuellen Stand kann diese Frage positiv beantwortet werden.

Vor einigen Jahren war die Situation noch eine andere. Zum Beispiel sah der Berliner Rahmenplan Mathematik für die 11. Klasse (Einführungsphase) vor mehr als zehn Jahren noch allein für das Thema „Folgen und Grenzwerte“ 15 Unterrichtsstunden vor und verlangte: „Für einfache konvergente Zahlenfolgen den Grenzwert erkennen und durch Anwendung der Grenzwertdefinition nachweisen können, daß die erkannte Zahl tatsächlich der Grenzwert ist.“¹ Dieses Thema wurde im Zuge der Schulzeitverkürzung deutlich zusammengestrichen. Heute verlangt der Lehrplan einen „propädeutischen Grenzwertbegriff“, sagt aber nicht, was damit gemeint sein soll. Inzwischen verlangen Abituraufgaben für Grundkurse häufig nur noch drei Probeeinzusetzungen als Nachweis für Konvergenz. Dies als Analysis und damit als Mathematik zu bezeichnen, ist zumindest fragwürdig.

Auch in den anderen Bundesländern ist die Situation ähnlich. Viele Lehrpläne verlangen ebenfalls einen „propädeutischen Grenzwertbegriff“, andere weisen andere Formulierungen auf. Gemeinsam ist allen, dass eine exakte Grenzwertdefinition nicht mehr verlangt wird. Die Nichtstandardanalysis dagegen geht rechnerisch vor, ist damit mathematisch exakt und zudem anschaulich. Diese Vorzüge sind unübersehbar.

Die folgenden Abschnitte zitieren aus den entsprechenden Abschnitten

¹An dieser Formulierung wird eine andere grundsätzliche Problematik der Standardanalysis deutlich: Man muss den Grenzwert kennen, um nachzuweisen, dass er es wirklich ist. Aber wie findet man den Grenzwert heraus?

der Mathematiklehrpläne der sechzehn Bundesländer, insbesondere Stellen, die auf Grenzwerte eingehen. Weiterhin fällt auf, dass in einigen dieser Vorgaben auch von Infinitesimalien die Rede ist. Die Zitate beruhen auf Recherchen bis zum Jahresanfang 2023. Eine erneute Durchsicht der im Internet veröffentlichten Lehrpläne zeigte zwar in einigen Fällen andere Formulierungen, aber keine grundsätzlichen inhaltlichen Änderungen oder Vorgaben. Damit ist weiterhin ein Unterricht mit den Methoden der Nonstandardanalysis in allen Bundesländern möglich und, wie begründet, zu empfehlen.

Baden-Württemberg

Im „Bildungsplan des Gymnasiums“ vom 23. März 2016 heißt es für die Klassen 9/10 unter der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“:

Vorbemerkungen: ... Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit einem propädeutischen Grenzwertbegriff, sie beschreiben und interpretieren das Änderungsverhalten von Größen analytisch. ...

Bei den Lernzielen steht:

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- (13) die mittlere Änderungsrate einer Funktion auf einem Intervall (Differenzenquotient) bestimmen und auch als Sekantensteigung interpretieren,
- (14) die momentane Änderungsrate als Ableitung an einer Stelle aus der mittleren Änderungsrate durch Grenzwertüberlegungen bestimmen,
- (15) die Ableitung an einer Stelle als Tangentensteigung interpretieren ...

Exakte Grenzwert-Mathematik wird somit nicht verlangt. Es ist also durchaus zweckmäßig, den Grenzwert als reellen Teil (Standardteil) zu errechnen.

Bayern

Auf der Seite

[http : // www.gym8 – lehrplan.bayern.de / contentserv / 3.1.neu / g8.de / id26192.html](http://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id26192.html) , abgerufen am 6. November 2020, steht unter „M 11.1.2 Lokales Differenzieren (ca. 9 Std.)“:

Ausgehend von graphischen Betrachtungen und numerischen Untersuchungen des Differenzenquotienten lernen die Jugendlichen den Differentialquotienten als Grenzwert kennen. Sie verstehen ihn als geeignetes Maß zur Beschreibung lokaler Änderungsraten und deuten ihn geometrisch am Graphen. Die dabei benötigten Grenzwerte ermitteln sie mithilfe elementarer Termumformungen. ...

Und unter „M 12.1 Fortführung der Infinitesimalrechnung“ findet man: *Auf der Grundlage ihrer Kenntnisse über Grenzwerte aus Jahrgangsstufe 11 gewinnen die Schüler mit der Integration ein tragfähiges Verfahren zur Messung von Flächeninhalten.*

Auch hier wird das zum Grenzwert eigentlich gehörende ε - δ -Verfahren nicht verlangt.

Berlin

Im „Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe, 1. Auflage 2006“ wird für Grund- und Leistungskurs inhaltlich folgendes vorgegeben:

4.1 Analysis**(a) Differenzialrechnung**

... inhaltlich-anschaulicher Grenzwertbegriff ...

Unter „Kompetenzerwerb im Themenfeld“ steht:

Im Grundkursfach bleibt diese Orientierung an Realsituationen durchgehendes Prinzip. Die Methoden der Infinitesimalrechnung werden weiterentwickelt, um z. B. Extremalprobleme in einfachen Anwendungen lösen zu können. Argumentationen werden hier immer auch inhaltlich geführt.

Im Leistungskursfach wird zusätzlich eine strengere Absicherung mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und Regeln angestrebt, indem Beispiele und Gegenbeispiele für verschiedene Phänomene (z. B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit) untersucht und systematisiert werden. Außerdem werden hier auch verstärkt Zusammenhänge aus rein innermathematischer Perspektive untersucht (z. B. geometrische Probleme, Kriterien für Extrema und Wendestellen).

Und weiter:

(b) Integralrechnung

Rekonstruktion eines Bestandes aus Änderungsraten in Anwendungssituationen (z. B. Wasserstand, zurückgelegter Weg) – als diskrete Modellierung und als anschaulicher Grenzprozess, Flächenbestimmung als Grenzprozess einer Ausschöpfung mit infinitesimalen Flächenstücken (z. B. durch Unter- und Obersummen). ...

Unter „Kompetenzerwerb im Themenfeld Integralrechnung“ findet man:
... Eine qualitative Rekonstruktion bzw. eine numerische Ausschöpfung ist dann die Grundlage für eine Präzisierung und inhaltliche Diskussion des zugrunde liegenden Grenzprozesses. Die Beschäftigung mit Grundproblemen der Integralrechnung ist also zunächst eine modellierende. Erst auf der Grundlage dieser Erfahrungen kann algebraisch erkundet werden, wie als Terme gegebene Funktionen zu integrieren sind.

Der Grundgedanke der Verknüpfung von Differenzial- und Integralrechnung im Hauptsatz wird ebenfalls an anschaulichen Beispielen plausibel. Hierzu dienen auch diskrete Modelle, an denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig argumentieren können. Im Grundkursfach werden die Integration und Differenziation in vielfältigen einfachen Anwendungskontexten vertieft. Neue Funktionsklassen werden nur hinzugezogen, sofern sie als Modelle für diese Kontexte dienen.

Im Leistungskursfach wird der Hauptsatz geometrisch-anschaulich bewiesen. Die Integration weiterer konkreter Funktionen und allgemeiner Funktionsklassen wird in enger Verknüpfung mit den Ableitungsregeln erarbeitet und bietet Gelegenheiten zum Problemlösen. Verschiedene andere Ausschöpfungsprozesse vertiefen das Verständnis für die Grundidee des Integrierens.

Diese Formulierungen lassen das Rechnen mit hyperreellen Zahlen zu.

Brandenburg

Im „Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandenburg“, gültig ab 1. August 2018, findet man folgende Formulierungen gleich an mehreren Stellen.

Unter „inhaltsbezogenen Kompetenzen“ wird für Grund- und Leistungskurs angegeben:

– Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitungen nutzen, ...

Unter „Inhalte“ wird dann präzisiert:

– Grenzwertverhalten von Funktionsgraphen ($x \rightarrow \infty$; $x \rightarrow x_0$)

– Schreibweise $\lim$ ohne formale Definition

– Ableitung einer Funktion mittels Differentialquotienten

Auch beim Thema „Integralrechnung“ wird entsprechend formuliert:

Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung des Integrals nutzen,

näherungsweise Bestimmen von Flächeninhalten unter Funktionsgraphen mittels Ober- und Untersummen, bestimmtes Integral als gemeinsamen Grenzwert von Ober- und Untersumme.

Der Begriff „infinitesimal“ fällt an mehreren Stellen. So steht unter der „Leitidee Algorithmus und Zahl [L1]“:

Die Leitidee erweitert um anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden.

Dann bei der „Leitidee Messen [L2]“:

Diese Leitidee erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen aus der Sekundarstufe I um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden.

Und schließlich bei der „Leitidee Funktionaler Zusammenhang [L4]“:

Es geht hier um funktionale Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften, auch unter Nutzung infinitesimaler Methoden und geeigneter Software.

Auch im Land Brandenburg ist es also möglich, die Analysis mit Infinitesimalien zu unterrichten.

Bremen

Im „Mathematik-Bildungsplan für die Gymnasiale Oberstufe – Qualifikationsphase –“, Stand 2008, wurde nach den Begriffen „Grenzwert“ und „Infinitesimalien“ gesucht. Beide Begriffe tauchen dort weder direkt noch in abgewandelter Form beim Thema Analysis auf.

Somit kann man davon ausgehen, dass Analysis mit infinitesimalen Zahlen unterrichtet werden kann.

Hamburg

In diesem Bundesland hat jede Lehrerin und jeder Lehrer die Möglichkeit, Nichtstandardanalysis zu unterrichten, denn im „Bildungsplan gymnasiale Oberstufe Mathematik“ der Stadt Hamburg aus dem Jahre 2009 findet man lediglich:

Die Schülerinnen und Schüler

... bestimmen Grenzwerte auf anschaulicher Ebene, ...

Hessen

Im hessischen „Kerncurriculum gymnasiale Oberstufe MATHEMATIK“ bezieht man sich „unter Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte“ auf die Begründer der Analysis, denn dort steht:

... Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten ist das Kernstück der infinitesimalen Sichtweise auf Veränderungsprozesse, die auf Isaac Newton (1642–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zurückgeht. Dafür benötigen die Lernenden einen propädeutischen Grenzwertbegriff, d. h. adäquate und ausbaufähige Vorstellungen zu Folgen und Grenzwerten, die sie durch die Untersuchung von Folgen mithilfe von Tabellen und Graphen entwickeln können. ...

Zwei Seiten dahinter konkretisiert man das und schreibt:

... Ableitung einer Funktion an einer Stelle:

Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten auf der Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs (Aufbau adäquater Vorstellungen z. B. durch Untersuchen von Folgen mithilfe von Tabellen und Graphen; eine formale Beschreibung von Grenzwerten mit Quantoren ist nicht erforderlich) ...

Entsprechende Formulierungen finden sich auch beim Thema Integralrechnung. An anderer Stelle findet man:

Die Leitidee [Algorithmus und Zahl (L1), d. Verf.] erweitert zum anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden.

Damit ist auch die Verwendung infinitesimaler Zahlen eingeschlossen.

Mecklenburg-Vorpommern

Im „Rahmenplan für die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe, Mathematik, 2019“ für dieses Bundesland steht bei den Unterrichtsinhalten unter „Verbindliche Inhalte“:

Grenzwerte von Funktionen [MD3]

– anschaulicher Grenzwertbegriff

– Verhalten im Unendlichen

Die Vorgaben sind so offen gehalten, dass Grenzwerte mit den Methoden der Nichtstandardanalysis ermittelt werden können.

Niedersachsen

In den „Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, gymnasiale Oberstufe Mathematik“, heruntergeladen am 6. November 2020, steht als „Unterrichtsinhalte der Vorstufe“:

Im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts im 11. Schuljahrgang steht das Tangentenproblem. Der Ableitungsbegriff kann mit Hilfe von „Folgen“ oder mittels „stetiger Ergänzung“ erfaßt werden. Dabei ist der „Grenzwert“ als der grundlegende Begriff der Analysis zu erarbeiten. Die Definition des Grenzwertes muß soweit präzisiert werden, daß sie für den Analysisunterricht in der Kursstufe tragfähig ist. Eine Verbindung zu den propädeutischen Grenzwertbetrachtungen aus den Schuljahrgängen 7 bis 10 ist herzustellen.

Für die „Kursstufe Analysis“ wird verlangt:

Schwerpunkte des Analysisunterrichts in der Kursstufe sind

- Vertiefung und Erweiterung der Begriffe und Verfahren aus der Vorstufe zur Untersuchung weiterer Funktionen
- das Flächeninhaltsproblem
- die Reflexion infinitesimaler Prozesse.

Auch hier wird vom Infinitesimalen gesprochen, worauf sich Lehrerinnen und Lehrer beziehen können, wenn sie Nichtstandardanalysis unterrichten.

Nordrhein-Westfalen

Dieses Bundesland formuliert im „Kernlehrplan für die Sekundarstufe II, Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen, Mathematik“ folgende „KOMPETENZERWARTUNGEN“ bis zum Ende der Einführungsphase:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext,
- erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate,
- deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten,
- deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/Tangentensteigung,
- beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),
- leiten Funktionen graphisch ab,

...

„Bis zum Ende der Qualifikationsphase (Grundkurs und Leistungskurs)“ wird erwartet:

Die Schülerinnen und Schüler ...

erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs, ...

Damit ist auch hier die Arbeit mit Infinitesimalien im Unterricht eingeschlossen.

Rheinland-Pfalz

Im „LEHRPLAN MATHEMATIK Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe)“ formuliert man die „Anpassung an die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife, Stand März 2015“ und präzisiert

Die fachlichen Kompetenzen:...

1.03g: Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen ...

Als Unterrichtsziele für den Grundkurs findet man:

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, eine inhaltliche Vorstellung des Grenzwertbegriffs bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken, eine ihrer Leistungsfähigkeit angemessene Präzisierung der Definition zu erreichen und sie zu befähigen, Grenzwerte zu bestimmen und auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs zu nutzen.

Über Grenzwerte wird geschrieben:

Der Zugang zum Grenzwertbegriff über Zahlenfolgen baut auf Vorkenntnissen aus der Sekundarstufe I auf. An eine extensive Behandlung von Zahlenfolgen und deren Eigenschaften ist nicht gedacht. Da sich rekursive Folgen in besonderer Weise eignen, ein Verständnis des Grenzwertbegriffs zu entwickeln, und ferner Rekursionen in den Anwendungen der Mathematik eine immer größere Bedeutung gewinnen, ist ein Eingehen auf diese Folgen im Unterricht ausdrücklich gefordert.

Im Zusammenhang mit der Reflexion über Grenzprozesse können auch historische Aspekte (Ringen um eine Präzisierung grundlegender Begriffe) und philosophische Ausblicke (Erfahrungen mit dem Unendlichen) in den Unterricht einbezogen werden.

Man soll sich also durchaus mit dem Unendlichen beschäftigen.

Unter „Ziele, Inhalte“ heißt es, die Schüler sollen den Begriff „Grenzwert einer Folge“ verstehen. Dazu folgen Hinweise:

Der Begriff „Grenzwert“ soll exemplarisch an Zahlenfolgen erfahren werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen eine inhaltliche Vorstellung davon gewinnen, was in der Mathematik unter einem Grenzwert verstanden wird. Der Begriff kann auf unterschiedlichen Niveaustufen erschlossen werden. Im Grundkurs genügt eine an der Definition orientierte verbale Beschreibung; auf eine Formalisierung ($\varepsilon - n_0$ -Fassung) sollte verzichtet werden.

Für den Leistungskurs formuliert man folgendes Ziel:

Grenzwerte

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, eine inhaltliche Vorstellung des Grenzwertbegriffs bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken, eine ihrer Leistungsfähigkeit angemessene Präzisierung der Definition zu erreichen und sie zu befähigen, Grenzwerte zu bestimmen.

Für die Differentialrechnung beschreibt man u.a. folgende Möglichkeiten: Die Ableitung kann als Grenzwert von Sekantensteigungen eingeführt werden. Gleichwertig sind Zugänge über Linearisierung und Änderungsraten möglich.

Die infinite Streckung eines Funktionsgraphen ist als Linearisierung zu

verstehen. Man geht auch auf mögliche „Beiträge der Fächer Physik / Astronomie“ ein:

Probleme mit den Begriffen „unendlich kleine Größen“ und „unbegrenzte Teilbarkeit“; Singularitäten

Beschreibung physikalischer Gesetze mit Hilfe der Infinitesimalrechnung.

Schließlich schreibt man unter

Weiterführung der Differential- und Integralrechnung:

In diesem Abschnitt werden weitere Ableitungs- und Integrationsregeln bereitgestellt und die Methoden der Infinitesimalrechnung auf ein erweitertes Funktionenmaterial angewendet.

Saarland

Im „Lehrplan Mathematik Gymnasiale Oberstufe Einführungsphase – Erprobungsphase – 2014“ wird zunächst im „Didaktischen Vorwort ...“ formuliert:

Der Lernbereich Stetigkeit verbindet sodann die Funktionenlehre und die Geometrie mit Anfängen der Differentialrechnung. Die Untersuchung des Grenzwertverhaltens bei infinitesimalen Prozessen ist gekennzeichnet durch zunehmende Abstraktion und markiert den Übergang zur Mathematik der Sekundarstufe II.

Dazu gibt man

methodische und fachdidaktische Erläuterungen:

Die Grenzwertbegriffe für Folgen und Funktionen werden nicht definiert, sondern nur veranschaulicht.

Im Vordergrund steht eine anschauliche Erarbeitung der Begriffe Grenzwert und Stetigkeit mit dem Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs erfassen.

Zum Thema „Stetigkeit“ verlangt man

verbindliches Fachwissen:

Bezeichnung: Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion f für x gegen x_0 , wenn die Funktionswerte $f(x)$ beliebig nahe bei g liegen, falls die x -Werte nur hinreichend nahe bei x_0 liegen.

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$.

Unter „Verbindliche Kompetenzschwerpunkte“ schreibt man dazu:

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen das Verhalten einer Funktion f , indem sie die x -Werte einer vorgegebene Zahl x_0 annähern und die zugehörigen Funktionswerte berechnen, auch mit Hilfe einer Tabellenkalkulation.

Damit kann Nonstandardanalysis unterrichtet werden.

Sachsen

Im sächsischen „Lehrplan Gymnasium Mathematik 2004/2009/2011/2013/2019“ verlangt man in

Klasse 10:

Kennen von Zahlenfolgen als spezielle Funktionen

- explizite und rekursive Bildungsvorschriften
- Schranke, Grenzwert

und empfiehlt dazu das

Nutzen von CAS zum Nachweis der Eigenschaften

anschauliches Gewinnen des Grenzwertbegriffs.

Schließlich heißt es für

Klasse 11/12:

grundlegende Kompetenz (im Grund- und im Leistungskurs):

Die Schüler gewinnen inhaltliches Verständnis von den Begriffen Grenzwert, erste Ableitung und bestimmtes Integral.

Auch in Sachsen können diese Anforderungen mit den Methoden der Nichtstandardanalysis erfüllt werden.

Sachsen-Anhalt

Im „Fachlehrplan Gymnasium/Berufliches Gymnasium, Stand: 01.07.2019, Mathematik“ steht für die Schuljahrgänge 11/12 unter

Kompetenzschwerpunkt: Grundlagen der Infinitesimalrechnung:

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen:

- Grenzwerte von Funktionen ermitteln.

Für ein „Erhöhtes Anforderungsniveau“ verlangt man sogar,

- Grenzwerte von Funktionen rechnerisch [zu] ermitteln.

An verschiedenen Stellen wird auf die Infinitesimalrechnung verwiesen:

- sachgerechtes Arbeiten mit Symboliken der Infinitesimalrechnung

Notationsformen der Infinitesimalrechnung verstehen und anwenden

Der Unterricht in der Qualifikationsphase eröffnet durch das Kalkül der Infinitesimalrechnung die Betrachtung von Änderungsraten und Extremaleigenschaften.

In diesem Lehrplan gibt es für die Analysis sogar einen Kompetenzschwerpunkt „Grundlagen der Infinitesimalrechnung“. Damit sollte niemand gehindert sein, mit den Mitteln der Nichtstandardanalysis den Unterricht zu gestalten.

Schleswig-Holstein

In diesem Bundesland gibt es die „Fachanforderungen Mathematik Allgemein bildende Schulen, Sekundarstufe I/Sekundarstufe II“.

Darin findet man Stichworte wie

- ... nutzen Grenzwerte zur Bestimmung von Ableitungen und Integralen,
- Grenzwerte von Folgen von Funktionswerten reeller Funktionen
- Limes

und schreibt erläuternd:

Es reicht die intuitive Erfassung des Grenzwertbegriffes. Die Schreibweise „lim“ kann auch ohne formale Definition verwendet werden.

Zum Kernthema der Analysis steht geschrieben:

Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten sollte durch Grenzwertprozesse intuitiv erfasst und mit dem DGS (Dynamisches Geometriesystem) veranschaulicht werden. Auch mithilfe der Tabellenkalkulation kann das Verständnis des Grenzwertprozesses unterstützt werden. Dabei sollten links-, rechts- und beidseitige Grenzwertprozesse betrachtet werden.

Folgendes kann man sogar als Hinweis auf die Nichtstandardanalysis verstehen: *In der Oberstufe werden die in der Sekundarstufe I vermittelten Kenntnisse über Funktionen und ihre Eigenschaften vertieft und insbesondere um die infinitesimalen Methoden der Differenzial- und Integralrechnung erweitert.*

Thüringen

Vom „Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur“ gibt es aus zwei Jahren Mathematiklehrpläne, nämlich den „Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife, Mathematik 2013“ und mit demselben Titel für 2018. Letzterer in Kraft gesetzt zum Schuljahr 2019/20 für Schüler der Klassenstufen 5 - 11. Darin steht für die Klassenstufe 10 und 11: *Der Schüler kann ...*

... den Grenzwertbegriff aus der Anschauung heraus erklären und die Grenzwertschreibweise $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow x_0}$ verwenden, um den Verlauf von Graphen (auch unter Berücksichtigung waagerechter und senkrechter Asymptoten) zu beschreiben, ...

Weitere Festlegungen zu den Themen „Grenzwert“ oder „Infinitesimalien“ gibt es nicht, so dass auch in Thüringen Nichtstandardanalysis unterrichtet werden kann.

4.2 Aufgabensammlung [F]

In diesem Abschnitt werden exemplarisch Aufgaben mit Lösungen vorgestellt, wie sie in gängigen Schulbüchern und eventuell auch in ähnlicher Weise in zentral gestellten Abituraufgaben vorkommen können. Dabei werden die Unterschiede bei den Lösungen in Standard- und Nichtstandardform deutlich gegenübergestellt. Zudem wird nachgewiesen, dass Nichtstandardanalysis den Lehrplänen und Richtlinien der einzelnen Bundesländer nicht widerspricht.

Funktionen und Relationen sind im Folgenden alle standard – mit Standardargumenten und -werten. Das Transferprinzip sichert die Fortsetzung auf alle reelle Zahlen, standard und nichtstandard.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x \cdot e^{-0,5x^2}.$$

- Führe eine vollständige Kurvendiskussion von f durch. Gib auch die Menge der Standardwerte von f an.
 - Zeichne den Graphen von f (1LE = 2cm).
- In den Graphen von f soll ein rechtwinkliges Dreieck mit maximalem Flächeninhalt eingezeichnet werden, wobei ein Punkt im Ursprung, ein zweiter auf der positiven x -Achse und der dritte mit der gleichen x -Koordinate wie der zweite auf dem Graphen liegen.
Bestimme diesen maximalen Inhalt $A_{\max}$.
- Welchen Inhalt hat das sich ins Unendliche erstreckende Flächenstück, das der Graph von f und die x -Achse einschließen?

Lösungen:

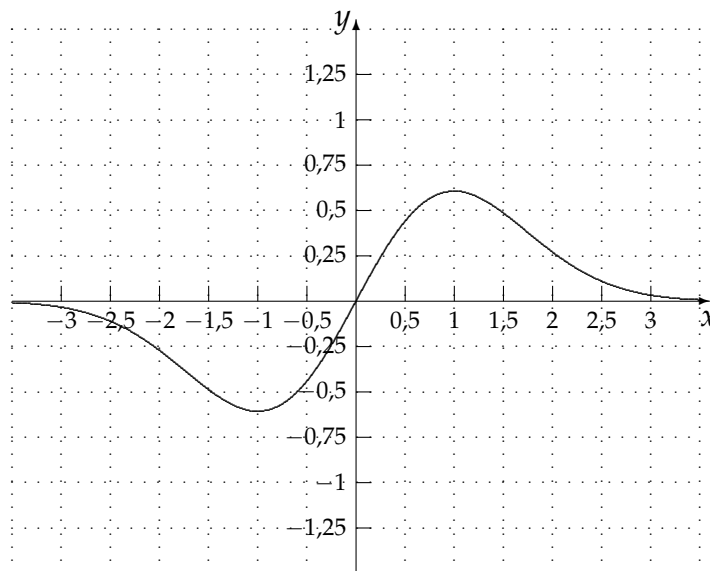
- Maximale Definitionsmenge: alle reellen Standardzahlen.
Punktsymmetrie wegen $f(-x) = -f(x)$;
Nullstelle $x_N = 0 \implies N(0; 0)$;
 $f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-0,5x^2}$ und $f''(x) = x \cdot (x^2 - 3) \cdot e^{-0,5x^2}$;
Extrema: $x_{E_{1/2}} = \pm 1$, $f(x_{E_{1/2}}) = \pm e^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x_{E_1}) < 0$, $f''(x_{E_2}) > 0$,
also Hochpunkt $H(1; e^{-\frac{1}{2}})$ und Tiefpunkt $T(-1; -e^{-\frac{1}{2}})$;
Wendepunkte: $W_1(0; 0)$, $W_{2/3}(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}})$;

Verhalten im Unendlichen:

Standard	Nichtstandard
Für große Werte von $ x $ dominieren die Werte $e^{-0,5x^2}$ der e-Funktion gegenüber dem linearen Faktor x (vgl. Abschnitt 3.8). Daher gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot e^{-0,5x^2} = 0$, und die x -Achse ist Asymptote des Graphen von f .	Für infinite x dominieren die Werte $e^{-0,5x^2}$ der e-Funktion gegenüber dem linearen Faktor x . Daher gilt $\pm \Gamma e^{-0,5x^2} \simeq 0$, und die x -Achse ist Asymptote des Graphen von f .

Wertemenge: $W = [-e^{-\frac{3}{2}}; e^{-\frac{3}{2}}]$;

(b) Graph:



2. Die drei Punkte seien $P(0; 0)$, $Q(u; 0)$ und $R(u; f(u))$ mit $u > 0$.

Dann gilt für den Flächeninhalt $A(u) = \frac{1}{2}u^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}$.

Mit Produkt- und Kettenregel sowie Ausklammern ergibt sich für $A'(u)$:

$$A'(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot (2 - u^2). \text{ Wegen } u > 0 \text{ gilt } A'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{2}.$$

Standard	Nichtstandard
Da $\lim_{u \rightarrow 0} A(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 0$, ...	Da $A(\alpha) \simeq 0$ und $A(\Gamma) \simeq 0, \dots$

... ergibt sich für

$$u = \sqrt{2} \text{ maximaler Flächeninhalt } A_{\max} \text{ mit } A_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}^2} = \frac{1}{e}.$$

3. Die Substitution $z := e^{-0,5x^2}$ liefert $z'(x) = \frac{dz}{dx} = -x \cdot e^{-0,5x^2} \dots$

(**Anmerkung:** Dieser in der Standard-Mathematik übliche Umformungsschritt ist eigentlich dort nicht erlaubt, denn nur in der Nichtstandard-Mathematik darf mit den auftretenden Infinitesimalien gerechnet werden (vgl. Abschnitt 11.2 in (Elemente 2022).)

... und damit

$$\int f(x) dx = \int x \cdot z \frac{dz}{-x \cdot z} = - \int dz = -z + C = -e^{-0,5x^2} + C.$$

Standard	Nichtstandard
Der besagte Flächeninhalt von A beträgt $A = 2 \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x \cdot e^{-0,5x^2} dx$ $= 2 \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} [-e^{-0,5x^2}]_0^a$ $= 2 \cdot (0 - (-1)) = 2$	Der Wert des Flächeninhalts A beträgt $A \simeq 2 \cdot \int_0^\Gamma x \cdot e^{-0,5x^2} dx$ $= 2 \cdot [-e^{-0,5x^2}]_0^\Gamma$ $\simeq 2(0 - (-1)) = 2$

Aufgabe 2

Für $t \neq 0$ sei eine Funktionenschar gegeben durch

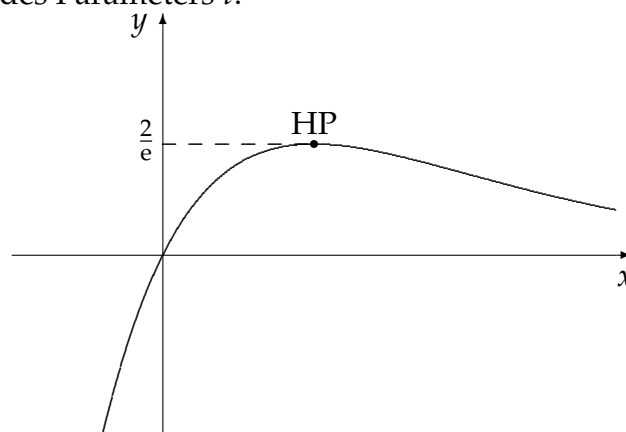
$$f_t(x) = \frac{2x}{t \cdot e^{-tx}} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von f_t sei K_t .

Standard	Nichtstandard
1. (a) Untersuche das Verhalten von f_t für $x \rightarrow \infty$. Fallunterscheidung!	Wie verhält sich f_t im Infiniten? Fallunterscheidung!

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen von f_t und f_{-t} ? Nachweis!

- (b) Das Bild zeigt einen der Graphen von K_t . Bestimme einen passenden Wert des Parameters t .



2. Für $x > 0$ beschreibt die Kurve der Funktion f_1 den Dickenzuwachs (in m) von Eichenbäumen (x : Alter des Baums in Jahren).

Berechne das Integral $\int_0^b f_1(x) dx$ und interpretiere diesen Wert im Sachzusammenhang „Eichenwachstum“.

(Lösungshinweis: $F_1(x) = -2e^{-x}(x+1)$)

Wie dick kann nach dieser Funktion eine Eiche werden?

Lösungen:

1. (a) Zunächst muss berücksichtigt werden, dass bei ...

Standard	Nichtstandard
... Grenzwerten wie $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$...	... unbestimmten Ausdrücken wie $\frac{\text{infinitesimal}}{\text{infinitesimal}}$ bzw. $\frac{\text{infinit}}{\text{infinit}}$...

... die Exponentialfunktion gegenüber der Potenzfunktion dominiert (vgl. Abschnitt 3.8). Außerdem ist das Vorzeichen von t für ...

Standard	Nichtstandard
... den Grenzwert ...	... das Verhalten ...

... entscheidend, so dass eine Fallunterscheidung nötig ist:

Standard	Nichtstandard
$t > 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{t \cdot e^{tx}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{t \cdot e^{tx}} = -\infty$ $t < 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{t \cdot e^{tx}} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{t \cdot e^{tx}} = 0$	$t > 0: f_t(\Gamma) = \frac{2\Gamma}{t \cdot e^{t\Gamma}} \simeq 0$ $f_t(-\Gamma) = \frac{-2\Gamma}{t \cdot e^{-t\Gamma}}$ ist negativ infinit. $t < 0: f_t(\Gamma) = \frac{2\Gamma}{t \cdot e^{t\Gamma}}$ ist negativ infinit $f_t(-\Gamma) = \frac{-2\Gamma}{t \cdot e^{-t\Gamma}} \simeq 0$

$$\text{Es ist } f_{-t}(x) = \frac{2x}{-t \cdot e^{-tx}} = \frac{2 \cdot (-x)}{t \cdot e^{t(-x)}} = f_t(-x).$$

Also entsteht der Graph von f_{-t} aus dem Graphen von f_t durch Spiegelung an der y -Achse.

- (b) Es ist $f'_t(x) = \frac{2}{t} \cdot e^{-tx} + \frac{2x}{t} \cdot (-t) \cdot e^{-tx} = \frac{2}{t} \cdot e^{-tx}(1 - tx)$. Einzige Extremstelle von f_t ist demnach $x_E = \frac{1}{t}$. Der zugehörige Funktionswert ist $f_t(\frac{1}{t}) = \frac{2}{t^2} \cdot e^{-1}$.

Durch Vergleich mit dem Funktionswert des Hochpunkts im vorgegebenen Graphen folgt $t = 1$.

2. $\int_0^b f_1(x) dx = \int_0^b 2xe^{-x} dx$. Mit $v' = e^{-x}$ und $u = 2x$ ergibt sich $v = -e^{-x}$ und $u' = 2$. Mittels partieller Integration folgt dann

$$\int 2xe^{-x} dx = -2xe^{-x} - \int -2e^{-x} dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -2e^{-x}(x+1) + C.$$

Also: $\int_0^b f_1(x) dx = -2e^{-b}(b+1) - (-2(0+1)) = 2 - 2e^{-b}(b+1).$

Dieser Term beschreibt die Dicke einer Eiche nach b Jahren.

Standard	Nichtstandard
Da er für $b \rightarrow \infty$ gegen 2 strebt, ...	Da $(2 - 2e^{-\Gamma}(\Gamma + 1)) \simeq 2 - 0 = 2, \dots$

... kann eine Eiche demnach bis zu 2m dick werden.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktionsschar f_t für $t > 0$ mit $f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x + \frac{t}{x-t}$, $x \neq t$. Der zugehörige Graph heiße K_t .

- Zeige: $f_t''(x) = \frac{2t}{(x-t)^3}$
 - Untersuche K_t auf Achsenschnittpunkte, Extrema, Wendepunkte und Asymptote-Werten.
 - Zeichne unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse den Graphen K_2 für $-2 \leq x \leq 7$ (Längeneinheit 1cm).
- Berechne die gemeinsamen Punkte von K_1 und K_2 .
 - Welcher der Punkte liegt auf *allen* Kurven K_t ?
 - Begründe, dass sich in diesem Punkt alle Kurven K_t berühren.

Lösungen:

- $$f_t'(x) = \frac{1}{t} - \frac{1}{(x-t)^2}$$

$$f_t''(x) = \frac{t \cdot 2 \cdot (x-t)}{(x-t)^4} = \frac{2t}{(x-t)^3}$$
 - Schnittpunkt mit der y-Achse:** $f_t(0) = \frac{1}{t} \cdot 0 + \frac{t}{0-t} = -1$
 $\rightarrow S(0; -1)$

Schnittpunkte mit der x-Achse/ Nullstellen: $f_t(x) = 0$,
d.h. $\frac{1}{t} \cdot x + \frac{t}{x-t} = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-t) - t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - tx + t^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4t^2}}{2}$$

→ keine Nullstellen

Extrema: $f'_t(x) = 0$, d.h. $\frac{1}{t} - \frac{1}{(x-t)^2} = 0$

$$(x-t)^2 - t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xt = 0 \Leftrightarrow x(x-2t) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2t$$

$$f''_t(x_1) = \frac{2t}{-t^3} < 0 \Rightarrow H(\text{für } t > 0)$$

$$f''_t(x_2) = \frac{2t}{(2t-t)^3} = \frac{2t}{t^3} > 0 \Rightarrow T(\text{für } t > 0)$$

$$f_t(x_1) = -1, \quad \text{also } H(0; -1).$$

$$f_t(x_2) = \frac{2t}{t} + \frac{t}{2t-t} = 2 + 1 = 3, \quad \text{also } T(2t; 3).$$

Wendepunkte: $f''_t(x) = 0$, d.h. $\frac{2t}{(x-t)^3} = 0$

$2t = 0$ im Widerspruch zu $t > 0$, also keine Wendepunkte.

Asymptoten:

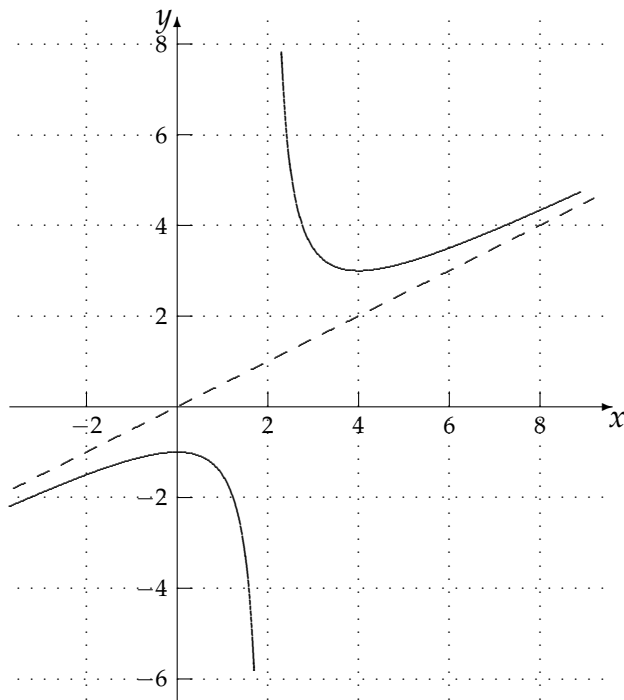
Senkrechte Asymptote bei $x = t$ (mit Vorzeichenwechsel):

Standard	Nichtstandard
a) Für $x \rightarrow t$ mit $x < t$ gilt: $\lim_{x \rightarrow t} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{x}{t} + \lim_{x \rightarrow t} \frac{t}{x-t}$ $= 1 + (-\infty) = -\infty$ b) Für $x \rightarrow t$ und $x > t$ gilt: $\lim_{x \rightarrow t} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{x}{t} + \lim_{x \rightarrow t} \frac{t}{x-t}$ $= 1 + \infty = \infty$	Für infinitesimales $\alpha > 0$ gilt: a) $f_t(t - \alpha) = \frac{t-\alpha}{t} + \frac{t}{-\alpha}$; der erste Summand ist finit, der zweite negativ infinit, die Summe also negativ infinit. b) $f_t(t + \alpha) = \frac{t+\alpha}{t} + \frac{t}{\alpha}$; der erste Summand ist finit, der zweite positiv infinit, die Summe also positiv infinit.

Weitere Asymptote:

Standard	Nichtstandard
Schiefe Asymptote, da $n = m + 1$, (wobei n der Grad des Zählerpolynoms, m der Grad des Nennerpolynoms ist): $y = \frac{1}{t} \cdot x$.	Da $\frac{t}{\Gamma-t} \simeq 0$, ist $f_t(\Gamma) \simeq \frac{1}{t} \cdot \Gamma$. Also besitzt K_t die Asymptote $A_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x$.

(c) Graph:



2. (a) $f_1(x) = x + \frac{1}{x-1}$ $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{x-2}$

$$\begin{aligned}
 x + \frac{1}{x-1} &= \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{x-2} \quad | \cdot (x-1)(x-2) \\
 2x(x-1)(x-2) + (x-2)2 &= x(x-1)(x-2) + 2(x-1)2 \\
 (x^2 - x)(x-2) + 2x - 4 &= 4x - 4 \\
 x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4 &= 4x - 4 \\
 x^3 - 3x^2 &= 0 \\
 x^2(x-3) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x_{1/2} = 0, x_3 = 3$$

$$f_1(x_{1/2}) = -1, \quad \text{also } P_1(0; -1),$$

$$f_1(x_3) = \frac{7}{2}, \quad \text{also } P_2(3; \frac{7}{2}).$$

(b) P_1 liegt auf *allen* Kurven K_t , da P_1 der von t unabhängige Hochpunkt ist!

(c) Da hier *alle* Kurven die gleiche Steigung haben ($f'_t(0) = 0$), berühren sich in diesem Punkt alle Kurven K_t .

Kapitel 5

Literatur und Links

Basiner, S. (2019). *Infinitesimale Größen. Bericht aus dem Unterricht*. Dortmund 2019.

<http://www.nichtstandard.de/unterricht.html>, aufgerufen: 2.05.2020.

Baumann, P.; Kirski, T. (2016). *Analysis mit hyperreellen Zahlen*, Mitteilungen der GDM 100 (2016), 6–16.

Baumann, P.; Bedürftig, T., Fuhrmann, V. (Hrsg.), (2022). *Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard*, Springer, Berlin 2022

Baumann, P.; Bedürftig, T.; Fuhrmann, V. (Hrsg.) (2022). *dx , dy – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen*, Handreichung 2. Auflage, Berlin, Hannover, Worms 2022. Link: <http://www.nichtstandard.de/pdf/Handreichung-2021.pdf>

Bedürftig, T. (2018). *Über die Grundproblematik der Grenzwerte*, Mathematische Semesterberichte 65/2 (2018), 277–298, <https://doi.org/10.1007/s00591-018-0220-0>.

Bedürftig, T. (2020). *Infinitesimalien, Grenzwerte und zurück*, Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 13, 201–235.

Bedürftig, T. (2022). *Über die Grenze zwischen mathematischer Lehre und mathematischem Unterricht*, DMV Mitteilungen Band 30 Heft2 (2022), 132–135, <https://www.degruyterbrill.com/document/doi/10.1515/dmvm-2022-0042/html?srsId=AfmBOooEj3QEwQw1-r3goAov-j6oknSg8g3nPZt-Q121Mlk5oKZ1c9d>

Bedürftig, T.; Murawski, R.; Kuhleemann, K. (2024). *Philosophie der Mathematik* (5., erweiterte und überarbeitete, Auflage). De Gruyter, Berlin 2024.

Bedürftig, T.; Kuhleemann, K. (2020). *Grenzwerte oder infinitesimale Zahlen? Über Einstiege in die Analysis und ihren Hintergrund*, Springer Fachmedien, Wiesbaden 2020.

Behrends, E. (2003). *Analysis I*. Braunschweig/Wiesbaden 2003 (6. Auflage Heidelberg 2015).

Behrends, E. (2004). *Analysis II*. Braunschweig/Wiesbaden 2004.

Dörr, J. (2017). *Analysis mit hyperreellen Zahlen – Unterrichtspraktische Erfahrungen aus einem Leistungskurs*. Speyer 2017, https://wiki.zum.de/images/f/f7/Folien_Unterrichtsversuch_VA_Vallendar_08_09_Juni_2017.pdf, aufgerufen: 2.05.2020.

Fuhrmann, V. und Hahn, C. (2019). *Differentialrechnung ohne Grenzwerte, eine Unterrichtsreihe im Grundkurs, Schuljahr 2018/2019*. Worms 2019.

<http://www.nichtstandard.de/unterricht.html>, aufgerufen: 2.05.2020.

Heinsen, S. (2019). *Einführung der Differentialrechnung ohne Grenzwerte - Erfahrungsbericht aus einem Unterrichtsgang in einem (gymnasialen) Grundkurs*. Bolanden 2019.

<http://www.nichtstandard.de/unterricht.html>, aufgerufen: 2.05.2020.

Hrbaček, Karel und Mikhail G. Katz: *Infinitesimal Analysis without the axiom of choice*. In *Annals of Pure and Applied Logic* 172 (2021) no. 6, Article 102959

Kuhlemann, K. (2018a): *Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung*. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 10 (2018), 47–65. Erweitert auf

<https://www.karlkuhlemann.net/start/forschung/>, aufgerufen: 7.04.2021.

Kuhlemann (2018b) K. Kuhlemann: *Zur Axiomatisierung der reellen Zahlen*, Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 10 (2018), 67–105.

Kuhlemann (2024) K. Kuhlemann: *Nichtstandard-Analysis – in der Hochschuldidaktik, Logik und Philosophie*, De Gruyter Verlag (2024)

Laugwitz, D. (1986). *Zahlen und Kontinuum*. Mannheim; Wien; Zürich 1986.

Lingenberg, W. (2019): *Konvergenz und Grenzwert im nichtstandardbasierten Unterricht*. Mitteilungen der GDM 106 (2019), 14–17 und <https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/842/837>

F. Padberg, R. Danckwerts und M. Stein (2010): *Zahlbereiche*, Heidelberg–Berlin–Oxford 1995 (Nachdruck 2010).

Schmieden, C.; Laugwitz, D. (1958). *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung*. Math. Zeitschrift 69, 1–39.

Wunderling, H.; Baumann, P.; Kirschi, T. (2007): *Analysis – als Infinitesimalrechnung*; DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, Berlin 2007.

5.1 Auswahlbibliographie [Ka]

Annotierte Auswahlbibliographie

Manche der folgenden Bücher sind bedauerlicherweise nur noch antiquarisch erhältlich; da sie aber durchaus für Lehrerinnen und Lehrer, die ihre Kenntnisse in der Infinitesimalrechnung vertiefen und auch um historische und philosophische Aspekte erweitern wollen, empfehlenswert sind, sind sie hier aufgeführt. Verlagsnamen sind in eckigen Klammern angegeben.

1. Baumann, P.; Kirski, T. (2019). *Infinitesimalrechnung – Analysis mit hyperreellen Zahlen*, Berlin 2019 [Springer Spektrum].

Hierbei handelt es sich um eine komplette Neuüberarbeitung des folgenden, von den Autoren zusammen mit H. Wunderling verfassten und ursprünglich für den Einsatz als Schulbuch konzipierten, darüber aber teilweise deutlich hinausgehenden Werks:

Wunderling, H.; Baumann, P.; Kirski, T. (2007): *Analysis – als Infinitesimalrechnung*; Berlin 2007 [DUDEN PAETEC Schulbuchverlag].

2. Bedürftig, T.; Murawski, R.: *Philosophie der Mathematik*. (5. Auflage) Berlin 2024 [de Gruyter].

Dieses Buch ist für jede Lehrerin und jeden Lehrer, der nicht nur Mathematik unterrichten, sondern bei seinen Schülerinnen und Schülern ein wirkliches Verstehen erreichen möchte, ein Gewinn, da es hilft, sich einen fundierten Überblick über bedeutsame Denker und Themen der Philosophie der Mathematik zu verschaffen, der für ein solches Vorhaben wichtig ist. In Bezug auf die Infinitesimalrechnung ist besonders das Kap. 6 („Infinitesimal denken und rechnen“) empfehlenswert.

3. Keisler, H. J.: *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. Boston 1976 [Prindle, Weber and Schmidt].

Keisler, H. J.: *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Boston 1976 [Prindle, Weber and Schmidt]

Bei dem ersten Buch von Keisler handelt es sich um ein grundlegendes Lehrbuch, welches laut Keisler die Infinitesimalrechnung „at the simplest possible level“ behandelt; das zweite Werk von Keisler nimmt demgegenüber einen höheren Standpunkt ein und gibt einen gedrängten Überblick des mathematischen Inhalts des Lehrbuchs, wobei hier auch Sätze bewiesen werden, welche im Lehrbuch unbewiesen bleiben bzw. deren Gültigkeit ohne Beweis vorausgesetzt wird. Beide

Bücher können kostenlos als pdf-Dateien auf der Homepage von Keisler (<http://www.math.wisc.edu/~keisler/>) in der aktuellen Fassung heruntergeladen werden. Das Lehrbuch ist in einer Neuauflage von 2012 [Dover] auch noch als Printausgabe im Buchhandel erhältlich.

4. Landers, D.; Rogge, L.: *Nichtstandard Analysis*. Berlin/Heidelberg 1994 [Springer].

Dieses Buch ist seit einem Vierteljahrhundert das umfassende deutschsprachige Lehrbuch; seine Zielgruppe sind Studierende, welche bereits gewisse Grundkenntnisse der Hochschulmathematik erworben haben, sowie auf Hochschulebene mathematisch vorgebildete Interessierte. Erwähnenswert sind auch die Teile zur Nichtstandard-Topologie und zur Nichtstandard-Stochastik.

5. Laugwitz, D.: *Zahlen und Kontinuum*. Mannheim/ Wien/ Zürich 1986 [Bibliographisches Institut]

Detlef Laugwitz, zusammen mit Curt Schmieden ein Pionier der modernen Infinitesimalrechnung, gibt in diesem Buch die reifste Darstellung seines infinitesimalen Zugangs mittels der Omega-Zahlen. Bemerkenswert sind auch seine historischen und philosophischen Bemerkungen und sein Ausblick am Ende des Buches.

6. Baumann, P.; Bedürftig, T., Fuhrmann, V. (Hrsg.) (2022). *Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard*, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2022

Dieses Lehrbuch haben wir oft zitiert. Es ist aus dieser Handreichung hervorgegangen und war ursprünglich als ihr Teil II geplant; es erscheint jetzt eigenständig in erweiterter Form und bietet den Hintergrund für die Arbeit mit unserer Handreichung. Es stellt Nonstandardansatz und Standardansatz nebeneinander und untersucht ihre Grundbegriffe.

Für Lehrerinnen und Lehrer sehr zu empfehlen ist die folgende Internetseite von P. Baumann und T. Kirschi: <http://www.nichtstandard.de> Diese Seite bietet sehr viel Material zum kostenlosen Download an, welches gut im Unterricht eingesetzt werden kann, sowie interessante Tutorials. Dort finden Sie auch eine umfangreiche Literaturliste.