Einstieg in die Analysis

Bericht über ein Projekt

Thomas Bedürftig

Seit Jahren praktizieren wir einen anderen, mathematisch klaren Einstieg in die Analysis – lehrplangemäß und nonstandard. Im Vergleich mit Standard stelle ich die Grundbegriffe „Stetigkeit", „Ableitung", „Integral" in unserem Einstieg vor und zeige die Unterschiede in der Anschauung, in der Arithmetik und im Hauptsatz. Ich spreche das Problem der reellen Zahlen an, ziehe Bilanz und propagiere die breitere Wahrnehmung und Praxis unseres Einstieges.

Vor zwölf Jahren begann die Arbeit im dx, dy-Projekt, wie es bald hieß. Ausgangspunkt war eine Fortbildung über „Philosophische Probleme im Mathematikunterricht" und der philosophische Blick auf das Kontinuum. „Kontinuum"? Was ist das? Das lineare Kontinuum ist heute, ganz anders als bis ins 19. Jahrhundert, die Zahlengerade, und die Punkte darauf sind die reellen Zahlen: $\mathbb{R}$ ist das Kontinuum. Das ist *Standard*. Aber es gibt auch *Nonstandard*. Und da ist das Kontinuum *nicht* $\mathbb{R}$. Denn, das zeigt ein genaueres Hinsehen, da passt auch $0,999\ldots$ getrennt und neben 1 auf die Zahlengerade und der Abstand ist *infinitesimal*. Wie man mit infinitesimalen Zahlen rechnen kann, das wurde in ersten kleinen Infinitesimalrechnungen angedeutet.

Was daraus wurde, unser Nonstandard-Einstieg in die Analysis im Unterricht, darüber soll hier in den Kernpunkten und im *Vergleich* mit dem Standardeinstieg berichtet werden. Links, Aufsätze, Mitteilungen, Bücher, eine Dissertation und *Handreichungen*, die aus unserer Arbeit entstanden und unten aufgeführt oder verlinkt sind, bieten methodische und begriffliche Vertiefungen, Einblicke in die Praxis, didaktische Erörterungen und die Darstellung des mathematischen Hintergrundes. In Fortbildungen, in der Diskussion mit den Kolleginnen und Kollegen und im praktischen Unterricht wurden unsere Ideen ständig geprüft. Die Varianten unseres Einstiegs in die Analysis sind lehrplankonform.

Jedem Einstieg in die Analysis liegen die reellen Zahlen zugrunde. Sie wurden ein weiterer Schwerpunkt unseres Projektes. Ihre Einführung im Unterricht bedeutet den Übergang in die theoretische Mathematik. Wie jedoch werden die reellen Zahlen gewöhnlich eingeführt? Durch ihre Voraussetzung – als Punkte auf der Zahlengeraden. Wie aber sind sie dahin gekommen? Wo kommen sie her? Wenn diese Fragen nicht gestellt werden, wird ein Bewusstsein für *Theorie* – für Axiome oder eine Konstruktion – verhindert. Das ist gravierend. Das „Erfinden" der Zahlen – so sagten es die Schüler – und das gemeinsame Vereinbaren des Rechnens stellten wir ins Zentrum einer Fortbildung über die Einführung von $\mathbb{R}$.

Der Unterschied

Alle Funktionen und Graphen in den kommenden Beispielen sollen stetig sein. Was heißt „stetig"? Hier, in diesem allerersten Begriff, zeigt sich der charakteristische Unterschied zwischen Standard und Nonstandard.

Stetigkeit
Wir haben es standard mit *reellen* und nonstandard mit *hyperreellen* Zahlen zu tun. Zu letzteren gehören die infinitesimalen Zahlen, unter ihnen die alten dx, dy, die seit Leibniz infinitesimale Größen waren. Nach den Konstruktionen der reellen Zahlen 1872 wurden sie entfernt und in der elementaren Analysis zu reinen Symbolen. Nonstandard, seit 1958, kehrten sie als Zahlen in die Mathematik zurück.

Die erste hyperreelle Relation ist $\simeq$. Beispiel: x sei reell.

> „$x \simeq x + dx$" heißt „x und $x + dx$ sind infinitesimal benachbart".

Hyperreelle Zahlen können „unendlich nah" beieinander liegen. Jetzt können wir die Standard- und Nonstandard-Formulierungen der Stetigkeit in x_0 einander gegenüberstellen.

Standard
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \left(|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Nonstandard
$$\forall x \left(x \simeq x_0 \Rightarrow f(x) \simeq f(x_0) \right)$$

Unten steht etwas Plausibles: „Wenn x sich sehr wenig ändert, dann ändert sich $f(x)$ sehr wenig". „Sehr wenig" heißt hyperreell „infinitesimal". Die Standardformalisierung ist kaum in Worte zu fassen. Sie versucht, „sehr wenig" oder „sehr klein" zu sagen, und wechselt zu „beliebig klein", was nur als Prozess auszudrücken ist und die komplizierte Formulierung benötigt. Man sieht hier ganz am Anfang, welche Bedeutung der Schritt aus der stetigen Größenanalysis seit Leibniz zur mengentheoretischen Grenzwertanalysis Ende des 19. Jahrhunderts hatte.

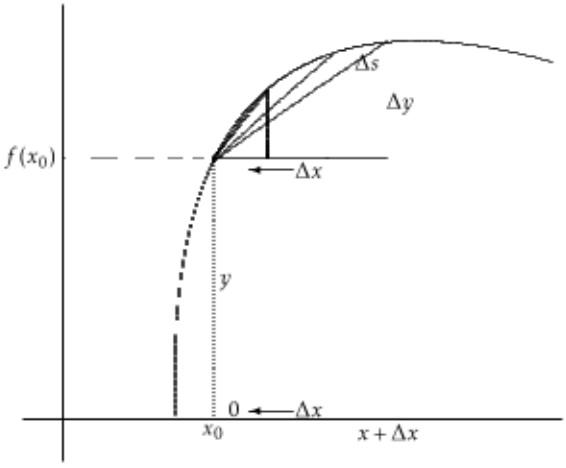
DOI 10.1515/dmvm-2026-0035

Anschauung

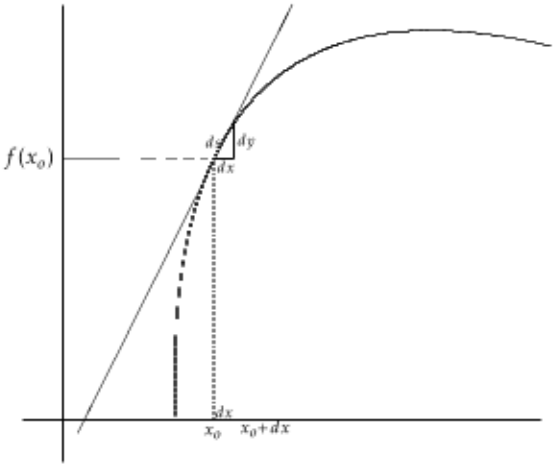
Tangentenbestimmung
Die Ankündigung einer Fortbildung begann so:

> Standardsituation: Tangentenbestimmung an eine Kurve, Folge von kleiner werdenden Sekantendreiecken. Frage: Was passiert? Diskussion! – Für Schüler verschwinden die Dreiecke in der Regel nicht. Sie stellen sich wie Leibniz und Cauchy ein unendlich kleines Dreieck vor.

Oben steht Standard, darunter Nonstandard:



Standard: Sekanten-Dreiecke, $\Delta x \to 0$



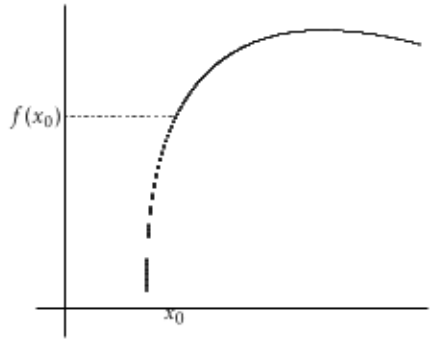
Nonstandard: Infinitesimales Dreieck, Tangente in ds

Im Text der Ankündigung folgte:

> Kann man es sichtbar machen? Ja, das Zeichnen eines unendlich kleinen Dreiecks ist mathematisch korrekt:
>
> Die Tangente verläuft durch die Hypotenuse des infinitesimalen Dreiecks.

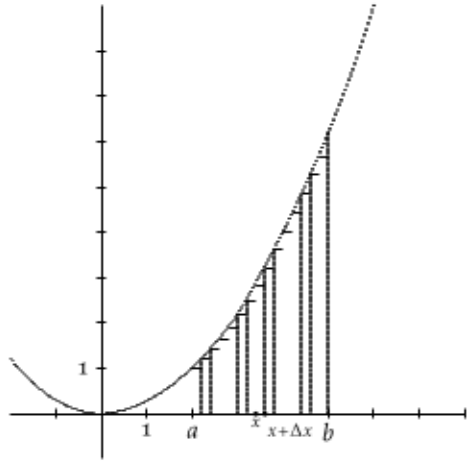
Denn wo infinitesimale Zahlen sind, sind auch infinite. In dem Aufsatz „Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung" wird bewiesen, dass die Veranschaulichung des unendlich kleinen Dreiecks für eine große Klasse von Funktionen mathematisch legitim ist.

Im Grenzwertzugang verschwinden die Sekantendreiecke im Unendlichen. Sie lösen sich auf. Was man sich „am Ende" vorstellt, ist ein Punkt (s. folgende Abbildung). Die gesuchte Tangente besitzt keinen geometrischen Träger. Was anschaulich vom Grenzprozess $\Delta x \to 0$ bleibt, ist eine Ahnung der Tangentensteigung, die durch geometrische Software gestützt werden kann.

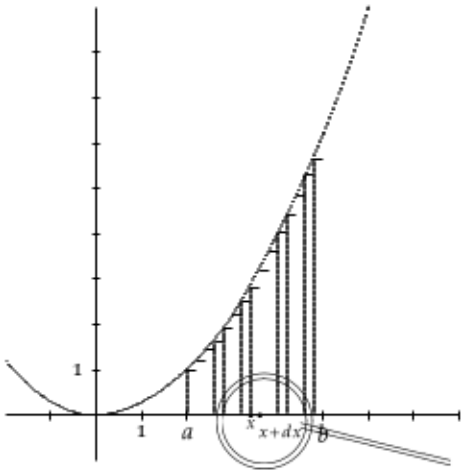


„Ergebnis": ·

Integral
Der Unterschied beim Integral:



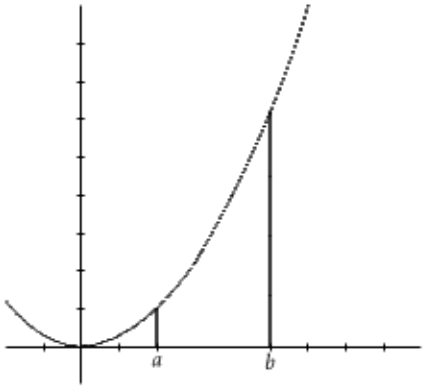
Standard



Nonstandard

Der Unterschied ist die Lupe. Das Standard-Bild zeigt eine Station auf dem Weg von Δx zu 0. Im Nonstandard-Bild ist das infinitesimale dx gesetzt: Die Unendlichkeitslupe macht dx sichtbar. Es erscheint das Integral in der ursprünglichen Bedeutung des Zeichens $\int$ als Flächensumme.

Standard strebt Δx gegen Null. Das Integral ist die Fläche unter dem Graphen von a bis b. Lassen wir im Nonstandard-Bild die Unendlichkeitslupe weg, ergibt sich das gleiche Bild. Die Entfernung der Unendlichkeitslupe veranschaulicht den Übergang von $x+dx$ zum reellen „Standardteil“ x:



Standard und Nonstandard

Rechnen

Wesentlich ist, wie bei der Stetigkeit, die Beziehung $\simeq$: Jede finite hyperreelle Zahl ist infinitesimal benachbart zu einer reellen Zahl, ihrem „Standardteil“.

Ableitung

Beispiel: Ableitung von $y = f(x) = x^2$ in x_0. Oben steht Standard, darunter jeweils Nonstandard:

Standard

Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Ableitung

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = f'(x_0).$$

Nonstandard

Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_0+dx) - f(x_0)}{dx} = \frac{(x_0+dx)^2 - x_0^2}{dx} = 2x_0 + dx.$$

Ableitung

$$2x_0 + dx \simeq 2x_0 = f'(x_0).$$

Das sieht wieder nur unspektakulär unterschiedlich aus. Das Rechnen ist zunächst gleich. Oben wird dann der Grenzwert bestimmt, unten der Standardteil. Wir bemerken: Nonstandard unterscheidet Differentialquotient und Ableitung.

Ein Blick in die Ableitungsregeln: Wie unterscheiden sich die Rechnungen? Beispiel. Kettenregel. Die Rechnungen sehen in der Regel so aus:

Standard

Sei $z = f\big(g(x)\big), y = g(x)$.

Dann ist $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Also $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$.

Nonstandard

Sei $z = f\big(g(x)\big), y = g(x), dy \neq 0$.

Dann ist $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Also $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$.

„In der Regel“, hieß es, besser: oft sieht standard wie nonstandard aus – auch wenn es standard keinen Sinn ergibt. Daher der einzige Unterschied in „$dy \neq 0$“, das standard fehlt, da es für reine Symbole sinnlos ist. Dennoch greift man standard gern auf das Rechnen mit den alten infinitesimalen Größen zurück, weil diese Art des Rechnens einfach suggestiv war – und wieder ist. Auf die korrekte, längere und schwierigere Standard-Ableitung der Kettenregel verzichten wir hier.

Integral
Neu hinzu zu den reellen Zahlen, sagten wir, kommen nonstandard die infinitesimalen Zahlen und – das ist nach einem Blick auf das obige nonstandard Bild für das Integral klar – die infiniten Zahlen: Wenn dx unendlich klein ist, dann gibt es unendliche viele, sagen wir μ Rechtecke, deren Flächen summiert werden. Das hyperreelle Rechnen ist so elementar, dass es als kleine Theorie mit, besser: von den Schülern entwickelt werden kann. Ein Unterrichtsentwurf ist in den *Handreichungen* (2.3) nachzulesen.

Wir betrachten das einfachste *Beispiel*: Der Graph oben stamme von $f(x) = x^2$. Wir setzen $a = 0$ und rechnen hyperreell. Sei $b = \mu \cdot dx$ und $x_k = k \cdot dx$. k kann finit oder infinit sein. Der Flächeninhalt eines Rechteckstreifens von x_k bis $x_k + dx$ ist

$$\begin{aligned} f(x_k) \cdot dx &= (x_k)^2 \cdot dx \\ &= (k \cdot dx)^2 \cdot dx. \end{aligned}$$

Die Rechnung:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\mu} (k \cdot dx)^2 \cdot dx &= dx^3 \cdot \sum_{k=1}^{\mu} k^2 \\ &= dx^3 \, \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{6} \\ &= \frac{dx\,\mu \cdot dx(\mu+1) \cdot dx(2\mu+1)}{6} \\ &= \frac{dx\,\mu \cdot (dx\,\mu + dx) \cdot (2dx\,\mu + dx)}{6} \\ &= \frac{b \cdot (b + dx) \cdot (2b + dx)}{6} \\ &= \frac{b \cdot (2b^2 + 3b\,dx + dx^2)}{6} \\ &= \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^2\,dx + \frac{1}{6}b\,dx^2. \end{aligned}$$

Wir kennen diese Rechnung. Standard steht nur Δx statt dx da. Nonstandard braucht es zum Ergebnis $\frac{1}{3}b^3$ die Standardteilbildung in jedem Summanden, standard die Grenzwertbildung und mit ihr die Grenzwertregeln.

Neu hier ist nonstandard das Rechnen mit infiniten Zahlen. Es funktioniert wie das Rechnen mit natürlichen und reellen Zahlen. Wesentlich ist die einfache Rechenregel:

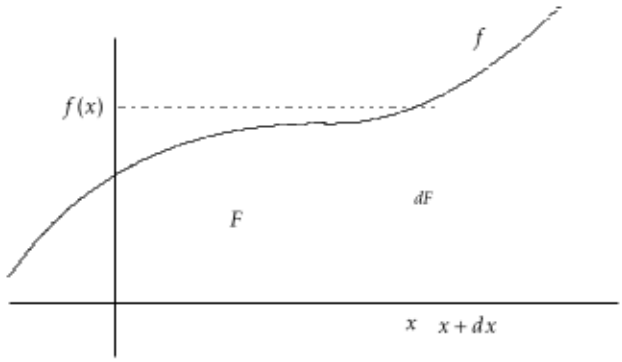
> Für finite hyperreelle Zahlen r ist $r \cdot dx \simeq 0$.

Da die Arithmetik wie die der reellen und natürlichen Zahlen ist, gelten die arithmetischen Formeln, z. B.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6},$$

auch für infinite „hypernatürliche" Zahlen.

Zum Hauptsatz
Wir zeichnen eine Skizze im nonstandard Zugang und *sehen* den Beweis:



Wir sehen

$$dF = F(x + dx) - F(x).$$

Da f stetig ist, ist f im Intervall $[x, x+dx]$ bis auf einen infinitesimalen Fehler konstant. Also

$$dF \simeq f(x) \cdot dx,$$

also

$$F'(x) \simeq \frac{dF}{dx} \simeq f(x).$$

Diese Argumentation finden wir in einer Aufgabenbearbeitung durch einen Schüler.

Standard ist der Beweis wegen der Grenzwertbildung schwieriger. Das Bild – mit Δx und ΔF statt dx und dF – ist standard der Anfang des Beweises, das nonstandard der Beweis ist.

Grundsätze des Rechnens
Die folgenden Beobachtungen, die Schülerinnen und Schüler in den Unterrichtsverläufen wie in der *Handreichung* (2022, 2.1 bis 3.1) im konkreten Rechnen machten, formuliert der Abschnitt 2.3 am Schluss im Rückblick:

> *Wir haben eine arithmetische Theorie aufgebaut. Wie sind wir vorgegangen? Was waren unsere Grundsätze?*
>
> 1. Wir gingen aus von der *Theorie der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.
> 2. Wir erfanden *infinitesimale Zahlen* α, β, dx usw.
> 3. Die entstehenden arithmetischen Terme bezeichnen *hyperreelle Zahlen* in ${}^*\mathbb{R}$.
> 4. Die alten arithmetischen Aussagen und Regeln gelten in ${}^*\mathbb{R}$ weiter (Transfer).
>
> *Für die Anwendung in der Analysis sind wichtig*:
>
> 5. Jede finite hyperreelle Zahl ρ besitzt einen reellen *Standardteil* r mit $\rho \simeq r$.
> 6. Wir denken uns die reellen Relationen und Funktionen auf ${}^*\mathbb{R}$ *fortgesetzt*.

Die Punkte 2., 4. und 5. sind die Axiome, die als „Vereinbarungen" getroffen wurden. Das ist der elementare mathematische Rahmen, den Schülerinnen und Schüler weitgehend selbst entwickeln und sich bewusst machen können.

Reelle Zahlen

Wir können wieder nur Andeutungen machen. Unser Vorhaben im Projekt wird am besten in der Ankündigung einer Fortbildung deutlich. „Mathe am Ende? – Auf dem Weg zu den reellen Zahlen" hieß die Fortbildung.

> „$\sqrt{2}$ ist irrational", heißt es zu Beginn der Einführung der reellen Zahlen. Aber was heißt das? „Irrational" heißt „nicht rational". Es gibt aber, wenn wir mit der Einführung beginnen, nur rationale Zahlen. Also heißt es am Anfang: „$\sqrt{2}$ ist keine Zahl", $\sqrt{2}$ ist ein Term ohne Bedeutung und in der Folge: Die Diagonale im Einheitsquadrat hat keine Maßzahl. Die Mathematik ist am Ende und kaum eine Einführung in die reellen Zahlen gesteht dies ein.
> Wie geht Mathe weiter? Wie bekommt $\sqrt{2}$ Bedeutung? Wie rechnet man mit $\sqrt{2}$? Wie entwickelt man die Zahl $\sqrt{2}$? Insgesamt: Wie macht man eine wirkliche Einführung in die Theorie der reellen Zahlen – gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern und ohne die üblichen Kunstgriffe? Geht das überhaupt?

Ja, es geht. Das zeigte der konkrete Unterricht, der zuerst an der Quadratverdopplung $b^2 = a^2 + a^2$ scheiterte, dann mit Entsetzen feststellte, dass es für die Diagonale im Einheitsquadrat keine Maßzahl gibt, und schließlich vergeblich nach Bruchzahlen mit $q^2 = 2$ suchte. Die Schüler *erlebten* regelrecht, wie ihre rationale „Mathe am Ende" war.

Was tun? Die Diskussion produzierte den zugehörigen Dedekindschen Schnitt. „Wir müssen eine Zahl erfinden!" war die spontane Äußerung. „Lückenzahl" hieß sie. Sie wurde mit $\sqrt{2}$ bezeichnet. Wie rechnet man damit? Die erste *Vereinbarung* war $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. Die Fortsetzung war die Ausführung der Adjunktion von $\sqrt{2}$ und anderen identifizierten Lückenzahlen an $\mathbb{Q}$. Die Unterrichtsgespräche führten zu erstaunlichen Einsichten und Äußerungen der Schülerinnen und Schüler über *ihre* Theorie der reellen Zahlen.

Es gab keine komplette Konstruktion der reellen Zahlen, die das Rechnen mit Dedekindschen Schnitte bedeutet hätte, aber doch ihren Anfang und ihr Prinzip. Eine Konstruktion in der Schule ist gar nicht möglich. Wichtig waren das Erfinden von Zahlen und die algebraischen Vereinbarungen, Beweise und Übungen bei den Adjunktionen. Werden wie selbstverständlich die Punkte der Zahlengeraden als reelle Zahlen genommen, entsteht die Frage nach einem erweiterten Rechnen mit reellen Zahlen kaum.

Wir planen, eine *Handreichung* zur Einführung von $\mathbb{R}$ zu schreiben.

Infinitesimale reelle Zahlen

Sind infinitesimale reelle Zahlen überhaupt möglich? Ja. Sie liegen auf der Hand, wenn man genauer in die Axiomatik der reellen Zahlen schaut. Das hat Karl Kuhlemann in seiner Dissertation und in dem Buch *Nichtstandard-Analysis. In der Hochschuldidaktik, Logik und Philosophie* (De Gruyter, Berlin 2024) getan. In der Einleitung wird die Plausibilität, man kann sagen: *Notwendigkeit*, eines solchen Ansatzes begründet. Denn die Axiome der Theorie der reellen Zahlen schließen nicht aus, dass es infinite natürliche Zahlen und damit infinitesimale reelle Zahlen gibt. Also kann man sie annehmen und *muss* dies einmal tun.

Hervorzuheben ist, dass der mengentheoretisch-logische *Status* dieser Nonstandardanalysis der von Standard ist. Sie setzt weder Auswahlaxiom noch Ultrafiltersatz voraus, noch impliziert sie sie. Beide Voraussetzungen werden der Nonstandardanalysis mit hyperreellen Zahlen in der Regel regelrecht „vorgeworfen". Das ist natürlich unbegründet, da die hyperreellen Zahlen im Unterricht so wenig konstruiert werden, wie es mit den reellen Zahlen der Fall ist. Mit dem konventionellen Status der Analysis mit infinitesimalen reellen Zahlen ist der eigenartige mathematikgesellschaftliche Vorbehalt der Nonstandardanalysis gegenüber insgesamt aufgehoben.

Im oben genannten Buch wird ein vorlesungsbegleitendes Proseminar zu diesem Einstieg in die Analysis entworfen. Wir haben ihm folgend eine *Handreichung „Auflage* $\mathbb{R}$" herausgegeben. Die Unterrichtsgänge darin sind wie in der hyperreellen *Handreichung*. Das Denken ist anders. Nur Weniges, manche Vokabeln und kurze Formulierungen, mussten wir übersetzen. Erprobt im Unterricht ist die *Auflage* $\mathbb{R}$ noch nicht.

Gegenüberstellung

Nonstandard
Unsere Erfahrungen zeigen die Nachhaltigkeit des Nonstandardeinstiegs im Unterricht. Jahre nach dem Einstieg greifen Schüler auf die alten infinitesimalen Argumentationen zurück. Schülerinnen und Schüler haben ihr Abitur absolviert und einige studieren Mathematik. Von einer Verunsicherung der Studenten, die von manchen Lehrenden als Argument gegen Nonstandard in der Lehre geäußert wird, kann nicht die Rede sein. Grenzwerte und infinitesimale Zahlen widersprechen sich nicht:

> *Jede konvergente Folge repräsentiert eine hyperreelle Zahl, die infinitesimal benachbart ist zu einer reellen Zahl. Sie ist der Standardteil der hyperreellen Zahl und der Grenzwert der Folge.*

Wo ist die $0,999\ldots$ geblieben? Sie war im Bericht nicht mehr zu sehen, da der Hintergrund des Einstiegs in die Analysis axiomatisch ist und man konkrete hyperreelle Zahlen nicht braucht. $0,999\ldots$ ist der konkrete Repräsentant einer hyperreellen Zahl kleiner als 1 und so der Anlass für erste Schritte in die Konstruktion der hyperreellen Zahlen. Der Unterrichtsgang 3.1 der *Handreichung* zeigt, wie Schülerinnen wie selbstverständlich mit unendlichen Folgen operieren, die hyperreelle Zahlen repräsentieren. Sie entwickeln erste Elemente der Arithmetik – explizit als Theorie über ~~der Theorie der~~ reellen Zahlen – und arbeiten kompetent mit infiniter Vergrößerung (Unendlichkeitslupe) und infinitesimaler Verkleinerung, um die neuen Verhältnisse auf der Zahlengeraden zu veranschaulichen.

Standard

Diesen neuen Erfahrungen im Projekt stehen unsere alten Erfahrungen und Wahrnehmungen im Standardeinstieg gegenüber. Wir sehen die Situation im Rückblick so:

Das universelle Charakteristikum von Standard ist die Grenzwertbildung im Hintergrund der Begriffe, der Standardrechnungen und der Standardveranschaulichungen. Veranschaulichungen sind standard auf Prozesse angewiesen, die man nur in Schritten andeuten kann oder mit geometrischer Software simuliert. Im Prinzip verschwindet alles Anschauliche und Rechnerische im Unendlichen, in dem ein intuitiver Grenzwert liegt. Der Grenzwertbegriff ist so anspruchsvoll, dass er in den Lehrplänen nur „propädeutisch" verlangt wird – was das immer heißt. Gefühl und Software überspielen die Notwendigkeit der mathematischen Fundierung der grundlegenden Begriffe der Stetigkeit und des Grenzwerts. Was bleibt, ist ein abstrakter, ein mathematisch nicht geklärter lim-Formalismus.

Streng genommen: Der Standard-Einstieg im Unterricht ist, solange die Begriffe der Stetigkeit und des Grenzwertes nicht da sind, keine Mathematik. Er arbeitet im Fundament nicht mit Begriffen, sondern „schwebt" über unklaren, intuitiven Vorstellungen individueller Art. Wir denken, der Standard-Einstieg kann gar nicht darüber hinausgehen, da die logisch-mengentheoretischen Voraussetzungen für einen fundierten Grenzwertbegriff fehlen.

Bilanz

Man sah und sieht es: Der Nonstandard-Einstieg ist anschaulicher. Das Rechnen ist einfacher. Der Einstieg ist Mathematik.

Der Nonstandardeinstieg ist ein mathematisch fundierter, elementarer und anschaulicher Ausweg aus den Problemen des Grenzwertunterrichts. Nach dem Einstieg geht der Unterricht weiter wie gewohnt, getragen aber von Anschauung und elementarer Arithmetik aus dem Einstieg. Unser Einstieg spart Unterrichtszeit, die anders, nämlich zur Entwicklung und Vertiefung und nicht zuletzt zur Übung des Bewusstseins einer theoretischen Mathematik genutzt werden kann.

Der *Grenzwertbegriff* ist keineswegs verschwunden. Das *Infinitesimale* im Nonstandard-Einstieg verweist vielmehr auf den Ausgangspunkt des historischen Weges von den unendlich kleinen Größen bei Leibniz bis zu den Grenzwerten. Die Begriffe „Grenzwert" einer Folge und „Standardteil" einer hyperreellen Zahl stehen einander gegenüber und bieten die Gelegenheit, auch mit Grenzwerten zu arbeiten. Unsere Erfahrungen zeigen, dass Schülerinnen und Schüler zum elementaren arithmetischen Weg tendieren.

Schluss

Unser Projekt fand mehr oder weniger im „Untergrund" statt. Es ist an der Zeit, dass unser erprobter Nonstandard-Einstieg in die Analysis deutlicher wahrgenommen, breiter erprobt und evaluiert wird. Die Texte, die im Projekt entstanden sind, stellen Beispiele, Anwendungen, Hintergrund, Weiterführungen, kurz: viel Material zur Verfügung. Wir meinen, dass Nonstandard-Einstiege auf lange Sicht zur mathematischen Aufwertung des Analysis-Unterrichts und zum Gewinn für Schülerinnen und Schüler führen würden.

Der Nonstandard-Einstieg in die Analysis ist elementar und anschaulich, er wird *im Unterricht* mathematisch fundiert und reflektiert. Wie wichtig die Eigenständigkeit der Schüler bei der Entwicklung der Theorie ist und wie wesentlich die Anschauung, zeigen die Unterrichtsverläufe, die wir in den *Handreichungen* vorstellen. Individuelles Denken und Anschauung waren immer Bedingungen der Inspiration in der Mathematik.

Texte aus dem Projekt

Im Projekt sind zahlreiche Texte entstanden: Aufsätze, Beiträge, Folien aus dem Unterricht, Bücher. Wir nennen hier nur die schon erwähnten *Handreichungen* für den Unterricht und die Dissertation zur Lehre:

Baumann, P.; Bedürftig, T.; Fuhrmann, V. (Hrsg.) (2022). *dx, dy – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen. Handreichung* 2. Auflage, Berlin, Hannover, Worms 2022. www.nichtstandard.de/pdf/Handreichung-2021-Auflage2.pdf

Kuhlemann, K. (2022). *Nichtstandard in der elementaren Analysis – Mathematische, logische, philosophische und didaktische Studien zur Bedeutung der Nichtstandardanalysis in der Lehre*. Dissertation, Fakultät für Mathematik und Physik, Hannover. DOI 10.15488/12105

Kuhlemann, K.; Bedürftig, T.; Baumann, P. (Hrsg.) (2025). *dx, dy – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen. Handreichung* Auflage ℝ.

Alle weiteren Texte aus dem Projekt und weitere Literatur sind unter dem Link www.nichtstandard.de/Veroeffentlichungen.html zu finden.

Prof. Dr. em. Thomas Bedürftig
Leibniz Universität Hannover
Institut für Didaktik der Mathematik und Physik
Welfengarten 1, 30167 Hannover
beduerftig@idmp.uni-hannover.de

Wir im Projekt, das sind: Stefan Basiner (Dortmund), Peter Baumann (Berlin), Thomas Bedürftig (Hannover), Jochen Dörr (Speyer), Volkhardt Fuhrmann (Worms), Christine Hahn (Worms), Stefanie Heinsen (Bolanden), Christian Kauferstein (Linz am Rhein), Thomas Kirski (Berlin), Karl Kuhlemann (Hannover), Wilfried Lingenberg (Pirmasens).