Infinitesimale Größen

Bericht aus dem Unterricht mit Schülern der Klassen 11 und 12
an der Rudolf-Steiner-Schule Dortmund (2018)

Motto: Beantworte nicht Fragen,
die außer dir sonst niemand der Anwesenden hat.

Bevor es losgeht: Drei Fragen an die Schüler

A)

Kurze
Antwort:

B)

beschreibe:

C)

$10^{-40} = 0{,}0000000000000000000000000000000000000001$

Sollte man diese Zahl noch von Null unterscheiden?

Antwort + kurze
Begründung:

Sinn der 3 Fragen

Suche das Interesse an allgemeinen Erkenntnisfragen, bevor du fachsimpelst.

Zu A) Unterscheide die begriffliche Bedeutung im Unterschied zur bloßen Wahrnehmung von irgendetwas.

Zu B) Die Handhabung eines Begriffs stellt uns vor neue Aufgaben:

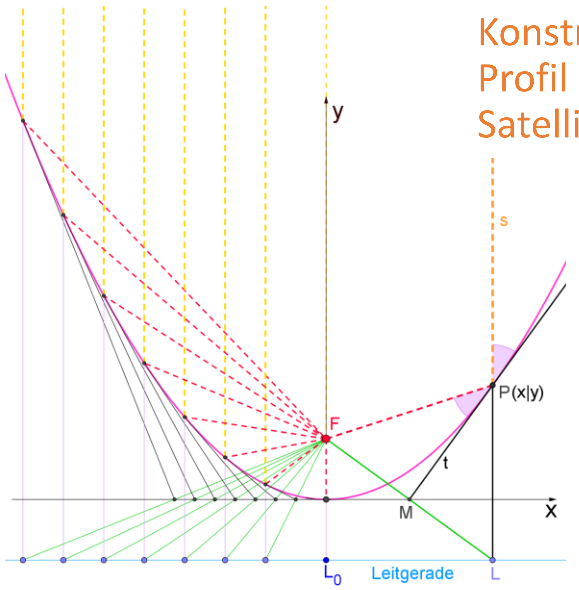
Wie bestimmt man die Richtung einer Kurve in einem Punkt?

Zu C) Bewusst werden verschiedener Bedürfnisse/Antriebe im Erkenntnisprozess:

– Praxisrelevanz einerseits (Z.B. sogar: „Lass Fünfe gerade sein“)

– Klares Denken andererseits.

Wo traten im Unterricht vorher Tangenten auf ?



Konstruktionsaufgabe: bestimme das Profil eines Scheinwerfers oder einer Satellitenschüssel.

Leitgerade: $y = -\frac{p}{2}$ Fokus: $\mathrm{F}\left(0\middle|-\frac{p}{2}\right)$

L(x$|-\frac{p}{2}$) beliebig auf der Leitgeraden
s = senkrechter Strahl durch L
t = Mittelsenkrechte von $\overline{FL}$ = Tangente
P(x|y) Schnittpunkt von t und s

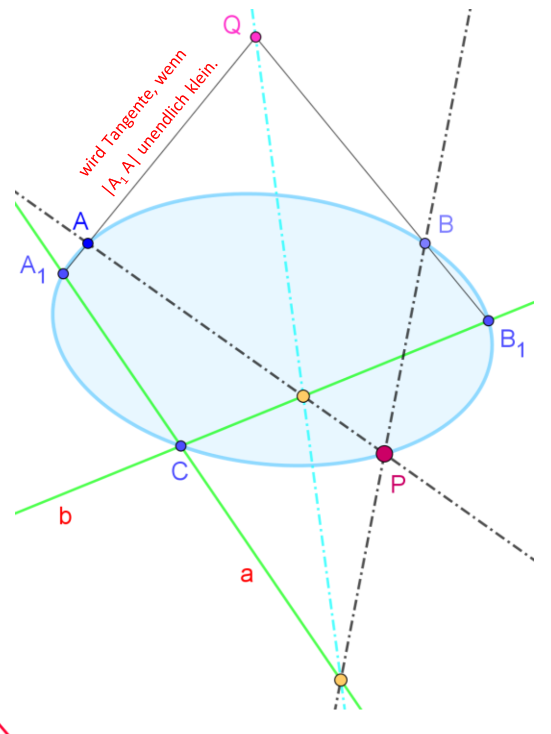
$y = \frac{x^2}{2p}$ und Steigung von t: $\mathrm{m} = 2 \cdot \frac{y}{x} = \frac{x}{p}$

Projektive Konstruktionen von Kegelschnitten

Fünf Punkte einer Ebene bestimmen mittels der Projektivität A$\doteq$b$\doteq$Q$\doteq$a$\doteq$B einen Kegelschnitt:

eine beliebige Gerade x durch A definiert einen Schnittpunkt mit der Geraden b. Dieser bestimmt eine Verbindungsgerade mit Q. Durch fortlaufendes Schneiden und Verbinden erhält man zuletzt eine Gerade y durch B. Der Schnittpunkt von x und y ist ein Punkt des Kegelschnittes.

Fällt A_1 und A zusammen, so gibt man die Tangente in A ∈ b vor.

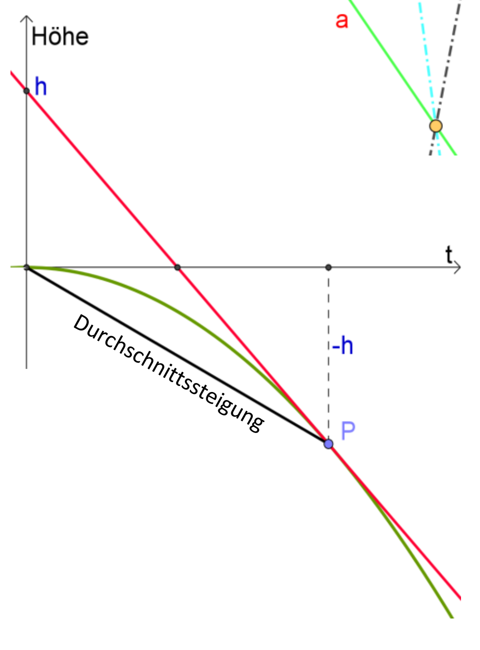


Im Physikunterricht stellten wir fest:

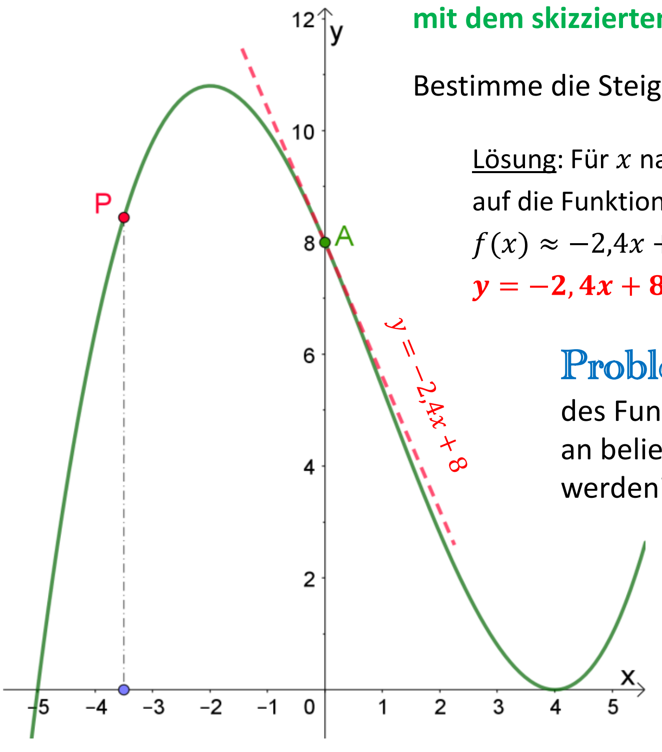
Erzeugt man auf der Tafel experimentell eine Wurfparabel und legt im Koordinatensystem wie rechts skizziert einen Punkte H(0|h) fest (h > 0), von dem aus eine Tangente an die Kurve zu zeichnen ist, ergibt die Messung, dass der Berührpunkt P bei y = -h liegt.

→

Augenblicksgeschwindigkeit = doppelte Durchschnittsgeschwindigkeit.



Einstiegsbeispiel



Gegeben $\boldsymbol{f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 2,4x + 8}$

mit dem skizzierten Graphen.

Bestimme die Steigung im Punkt A(0|8).

Lösung: Für x nahe Null hat $0{,}1x^3 - 0{,}3x^2$ kaum Einfluss auf die Funktionswerte, also gilt in der Nähe der y-Achse: $f(x) \approx -2{,}4x + 8$. Daher lautet die Tangentengleichung $\boldsymbol{y = -2,4x + 8}$, und die Steigung im Punkt A beträgt -2,4.

Problemstellung

Wie kann die Steigung des Funktionsgraphen in P(-3,5|8,4375) oder an beliebigen Punkten $(x_0|f(x_0))$ bestimmt werden?

Wird die Frage, wozu die Kenntnis von Steigungen nützlich sein könnte, nur innermathematisch beantwortet, z.B. mit Hinweis auf die Bestimmung von Extrem- oder Wendepunkten, so sollte man wenigstens ahnen, dass man einige Schüler damit bestimmt nicht erreicht. Hier lohnen sich auch „unmathematische" Überlegungen!

Lösungsidee

Übertrage die Berechnung der Durchschnittssteigung $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ zwischen zwei auseinander-liegenden Kurvenpunkten auf ein Punktepaar, deren horizontaler Abstand fast Null ist: $dx \approx 0$

Definition: $\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$ ist der *Differentialquotient von f an der Stelle x_0*

im Unterschied zum Differenzenquotienten $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ oder $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

zwischen zwei auseinanderliegenden Stellen.

Durchführung

$\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$ formen wir um

(und üben den Umgang mit der binomischen Formel)

$$f(x_0 + dx) = 0{,}1({x_0}^3 + 3{x_0}^2dx + 3x_0dx^2 + dx^3) - 0{,}3({x_0}^2 + 2x_0dx + dx^2) - 2{,}4(x_0 + dx) + 8$$

Subtrahiere $f(x_0) = 0{,}1{x_0}^3 - 0{,}3{x_0}^2 - 2{,}4x_0 + 8$ so folgt:

$$\frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} = \frac{0{,}1(3{x_0}^2dx + 3x_0dx^2 + dx^3) - 0{,}3(2x_0dx + dx^2) - 2{,}4dx}{dx}$$

Ergebnis $= 0{,}1 \cdot 3{x_0}^2 - 0{,}3 \cdot 2x_0 - 2{,}4 + (3x_0 + dx) \cdot dx$

Interpretation

Der Summand $(3x_0 + dx) \cdot dx$ *ist unendlich klein, gewissermaßen „unmessbar".*

Daher gilt: $\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} \approx 0{,}1 \cdot 3{x_0}^2 - 0{,}3 \cdot 2x_0 - 2{,}4$

Den unendlich kleinen nicht-messbaren Teil $(3x_0 + dx) \cdot dx$ lassen wir weg, wenn uns nur die reellwertige Steigung interessiert. Für $x_0 = -3{,}5$ ist daher der Steigungswert 3,375. Und für $x_0 = 0$ bestätigt sich der Wert -2,4, den wir als Steigung der Kurve in Punkt A vorher schon auf andere Weise ermittelt hatten.

Fazit

Für $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 8$

haben wir eine neue Funktion hergeleitet, die jeder Stelle x_0 die (reell-wertige) Steigung des Graphen von f im Punkt $(x_0|f(x_0))$ zuordnet. Und der Funktionsterm dieser hegeleiteten Funktion lautet $0{,}3x^2 - 0{,}6x - 2{,}4$.

Definition: die aus einer Funktion f hergeleitete *„Steigungsfunktion"*, die jeder Stelle x_0 den messbaren (reellen) Anteil von $\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$ zuordnet, bezeichnet man mit f' und nennt sie die *Ableitung* von f.

In unserem Beispiel $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 8$

gilt also: $f'(x) = 0{,}3x^2 - 0{,}6x - 2{,}4$.

Eine neue Art von Zahlen

Wir haben aus $dx \approx 0$ geschlossen, dass auch $(3x_0 + dx) \cdot dx \approx 0$ gelten müsste. Wir haben unseren Zahlenraum erweitert um unendlich kleine Zahlen, ähnlich wie das Rechnen mit Zahlen $\sqrt{2}$ oder π zu einer Erweiterung des Zahlenraums der rationalen Zahlen geführt hat hin zu den reellen Zahlen. Es ist eine mathematische Aufgabe, die Strukturen und Rechenmöglichkeiten innerhalb eines neuen erweiterten Zahlenraumes, hier also den der sogenannten „Hyper-reellen Zahlen" zu analysieren.

Wir wollen hier lediglich zusammenfassen, welche Rechenregeln uns im Umgang mit unendlich kleinen Zahlen naheliegend und sinnvoll erscheinen, und kommen so zu dem Überblick rechts.

Rechnen mit unendlich kleinen Zahlen:

Sei $dx \approx 0$ und $dx' \approx 0$ und seien r,s reelle Zahlen, dann gelte:

$0 \cdot dx = 0$ und $\frac{0}{dx} = 0$ (wurde problematisiert)

$r \cdot dx \approx 0$ und $r + dx \approx r$

$dx \cdot dx' \approx 0$ und daher

$(r + dx) \cdot (s + dx') \approx r \cdot s$

Reduktion der Komplexität

Die Ableitung von Funktionen der Form $f(x) = ax^n$

Bemerkung: Der Umgang mit Binomialkoeffizienten ist auch für die Wahrscheinlichkeitsrechnung von Bedeutung und war vorher mit den Schülern eingehend besprochen worden. Insbesondere ist den Schülern vom Pascal'schen Zahlendreieck $\binom{n}{n-1} = n$ bekannt. Statt der folgenden allgemeine Behandlung ist eine exemplarische Rechnung z.B. mit $f(x) = ax^4$ erwägenswert, um daran anschließend zu überlegen, was sich ändert, wenn man den Exponenten erhöht.

Sei n eine natürliche Zahl ≥ 2 und a ≠ 0 eine reelle Zahl.

Mit $(x_0 + dx)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_0}^k dx^{n-k}$ folgt:

$$\frac{a(x_0 + dx)^n - a{x_0}^n}{dx} = a\frac{(x_0 + dx)^n - {x_0}^n}{dx} = a\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} {x_0}^k dx^{n-k}}{dx}$$

Man sieht im letzten Glied der Gleichungskette, dass in jedem Summanden des Zählers der Faktor dx auftritt und abgesehen vom ersten Summanden sogar in höherer Potenz. Daher können wir den Bruch durch dx kürzen und erhalten:

$$= a\binom{n}{n-1} {x_0}^{n-1} + a\left(\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} {x_0}^k dx^{n-2-k}\right) dx \approx a\binom{n}{n-1} {x_0}^{n-1}.$$

Berücksichtigt man noch $\binom{n}{n-1} = n$, so erhält man

Die Ableitungsregel für einfache Potenzen: $(ax^n)' = nax^{n-1}$

- Überlege, ob diese Formel auch für Geradengleichungen (n = 1) und für konstante Funktionen (n = 0) richtig ist.
- Wende die Formel $(ax^n)' = nax^{n-1}$ auf die Summanden unseres Beispiels $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 8$ an und vergleiche dazu unsere Herleitung $f'(x) = 0{,}3x^2 - 0{,}6x - 2{,}4$.

Hinweis: Die Formel $(f+g)' = f' + g'$ bezeichnet man *Summenregel*. Mit ihrer Gültigkeit ist also die oben vorgenommene Reduktion gerechtfertigt.

Rückblick

- Was versteht man bei der Ableitung von Funktionen unter der Summenregel?
- Was bedeutet $f'(x)$ anschaulich, und wie haben wir f' definiert?
- Wir haben mit einer neuen Sorte von Zahlen gerechnet, mit unendlich kleinen Größen $dx \approx 0$, die aber nicht Null sind. Welche Rechenregeln haben wir für dx im Zusammenhang mit beliebigen reellen Zahlen für gültig erachtet?
- Was versteht man unter dem Differentialquotienten einer Funktion f an einer Stelle x_0 und worin besteht der Unterschied zu einem Differenzenquotienten?
- Wie haben wir die Steigung -2,4 im Ordinatenpunkt des Graphen von $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 8$ ohne Rechnung ablesen können?

Die nächsten Schritte

- Rechtfertigung der Summenregel
- Kurvendiskussion