Nr. 2 1995 I

UNTERRICHTSMATERIALIEN

Mathematik

betrifft uns

Hyperreelle Zahlen

Mit zwei Overheadfolien

Bergmoser + Höller
Verlag GmbH

Hyperreelle Zahlen

Zum Inhalt

„Mathematik betrifft uns“ enthält Planungsmaterial für einen motivierenden und effizienten Mathematikunterricht mit

- allgemeinen Informationen zum Thema
- Vorschlägen zum Unterrichtsverlauf
- umfangreichen Materialien (Informations- und Aufgabenblätter, Lösungsvorschläge, Klausuraufgaben) zum Kopieren
- abwechselnd Overheadfolien oder eine Begleitdiskette (3,5", für PCs)

Unser Ziel

„Mathematik betrifft uns“ bietet Ihnen Unterrichtsmaterial für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II mit Berücksichtigung der Klassen 8-10 der Sekundarstufe I, das

- Ihnen die Unterrichtsvorbereitung verkürzt und erleichtert
- Standardthemen in neuer didaktischer Aufbereitung präsentiert
- durch Einbeziehung von modernen Medien den Unterricht abwechslungsreicher und anschaulicher macht

Der Kontakt

Wir freuen uns, wenn Sie uns Ihre Erfahrungen und Verbesserungsvorschläge mitteilen, damit „Mathematik betrifft uns“ noch praxisbezogener werden kann.
Wenn auch Sie eine interessante Unterrichtsreihe ausgearbeitet haben, schreiben Sie uns doch einfach:

Bergmoser + Höller Verlag
Redaktion Mathematik betrifft uns
Karl-Friedrich-Str. 76
52072 Aachen

Impressum

Herausgeber:
Karel Tschacher, Heroldsberg

Autoren der Einheit:
Dr. Bernhard Steinig, Peter Baumann, Helmut Wunderling

Erscheinungsweise:
sechs Ausgaben pro Jahr

Abonnement:
DM 87,– plus Porto pro Jahr

Einzelheft mit Abonnement:
DM 14,50 plus Porto

Einzelheft ohne Abonnement:
DM 19,50 plus Porto

Satz:
graphodata GmbH, Aachen

Druck:
Image Druck GmbH, Aachen

Verlag:
Bergmoser + Höller Verlag GmbH
Karl-Friedrich-Str. 76
52072 Aachen

ISSN 0938-0876

Dr. Bernhard Steinig / Peter Baumann / Helmut Wunderling

Hyperreelle Zahlen

Zum Inhalt

Die wesentliche Grundlage des herkömmlichen Analysisunterrichts ab der 11. Jahrgangsstufe ist der Grenzwertbegriff. Er ist aber – zumindest für sehr viele Schüler/innen – auch das Hauptproblem. Viel Unterrichtszeit wird zu seiner Einführung verwendet, um ihn schließlich bei der Anwendung der vergleichsweise einfachen Ableitungs- und Integrationsregeln fast gar nicht mehr zu benötigen. Hier bietet das Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen eine weittragende Alternative. Diese beiden Zahlenarten gehören zum Körper der sogenannten hyperreellen Zahlen. Es handelt sich dabei um eine Erweiterung des reellen Zahlenkörpers, die in unserem Jahrhundert entwickelt wurde, deren Grundideen jedoch auf die „Väter der Infinitesimalrechnung" zurückgehen. Damit steht jetzt auch für die Schule ein nach heutigen Maßstäben abgesichertes Werkzeug zur Verfügung, das z. B. Physiker schon lange erfolgreich verwendet haben.

Die vorliegende Mappe führt die hyperreellen Zahlen über Folgen reeller Zahlen ein, zeigt Möglichkeiten ihrer Veranschaulichung und behandelt das Rechnen mit ihnen. Auf dieser Grundlage können Differential- und Integralrechnung ohne Grenzwert eingeführt werden.

Am Beginn steht die Darstellung reeller Zahlen durch ihre jeweiligen Ziffernfolgen. Dabei wird auf das Problem der „Neunerperioden" (z. B. $0,\overline{9}$) eingegangen. Die $0,\overline{9}$ soll nämlich nicht wie in $\mathbb{R}$ einfach mit 1 identifiziert werden, sondern soll als eine weitere Zahl – als eine hyperreelle Zahl, die kein „reelles Gegenstück" besitzt – aufgefaßt werden. Die Differenz $1 - 0,\overline{9}$ bildet dann ein erstes Beispiel einer infinitesimalen, von Null verschiedenen, Zahl. Infinite Zahlen („unendlich große Zahlen") sind die Kehrwerte von Infinitesimalzahlen. Die Gesamtheit aller Zahlen, die sich durch reelle Zahlenfolgen darstellen lassen, wird als die Menge der hyperreellen Zahlen $\mathbb{H}$ bezeichnet. In dieser Menge $\mathbb{H}$ lassen sich die reellen Zahlen wiederfinden, nämlich als diejenigen hyperreellen Zahlen, die sich durch eine konstante reelle Zahlenfolge darstellen lassen.

Mit den hyperreellen Zahlen lassen sich die Grundrechenarten ausführen, indem man dabei auf die jeweiligen Darstellungen als Zahlenfolgen zurückgreift und gliedweise rechnet.

Betrachtet man die hyperreelle Zahlengerade an einem reellen Punkt P durch eine „Unendlichkeitsbrille" (eine Brille mit unendlicher Vergrößerung), so ist jeder darstellbare Punkt ein infinitesimaler Nachbar von P, denn jeder reelle Nachbar liegt in diesem Maßstab unendlich weit von P entfernt.

Ebenso kann auch die hyperreelle Zahlengerade mit der „umgedrehten" Unendlichkeitsbrille unendlich verkleinert werden. Dabei gelangen infinite Zahlen in das Blickfeld des Betrachters, während alle finiten Zahlen in einem Punkt zusammenfallen.

Jede finite hyperreelle Zahl h läßt sich in eine Summe aus einer reellen Zahl r und einer infinitesimalen Zahl α zerlegen. Diese Zerlegung ist eindeutig: $h = r + \alpha$. Die reelle Zahl r heißt auch der reelle Teil von h: $r = RT(h)$.

Die Funktion RT hat also als Definitionsbereich die Menge der finiten hyperreellen Zahlen und als Wertebereich die Menge der reellen Zahlen. Sie ist mit den algebraischen Operationen verträglich.

Didaktische Anmerkungen

Im folgenden Unterrichtsgang werden die sogenannten hyperreellen Zahlen eingeführt, die über die gewöhnlichen reellen Zahlen hinaus noch unendlich kleine und unendlich große Zahlen umfassen. Wir verwenden jedoch den Begriff „unendlich" nur sehr sparsam und sprechen statt dessen von infinitesimalen Zahlen (die einen unendlich kleinen Betrag besitzen) und von infiniten Zahlen (mit unendlich großem Betrag). Das Wort „unendlich" kann

nämlich bei Schülerinnen und Schülern philosophische Assoziationen wecken, die den Lernprozeß unnötig aufhalten.
Die hyperreellen Zahlen bilden die Grundlage für eine Analysis, die gänzlich ohne Konvergenz- und ohne Grenzwertbegriff auskommt. Der didaktische Wert dieses Konzepts liegt vor allem darin, daß den Schülerinnen und Schülern ein Hilfsmittel zur Verfügung gestellt wird, das sie beispielsweise befähigt, die Regeln des Differenzierens oder Integrierens ohne Rückgriff auf gesonderte Heuristik zu errechnen. Gleichzeitig ermöglicht das Konzept eine Verteilung der Schwierigkeiten, die beim üblichen Vorgehen geballt am Anfang des Kurses stehen. Nicht zuletzt erhalten auch die Leibnizschen Differentiale dy, dx usw. ihren Sinn zurück und werden nicht nur als erfolgreiche Symbole behandelt.
Die hyperreellen Zahlen werden über Folgen von reellen Zahlen eingeführt. Zahlen durch Folgen zu beschreiben, ist Schülerinnen und Schülern prinzipiell nicht fremd, weil sie es bereits von der Einführung reeller Zahlen her kennen. Zum Einstieg wählen wir die Problematik der „Neunerperioden". Hier nutzen wir die Erfahrung, daß die meisten Schülerinnen und Schüler die Zahl, die durch die Zifferndarstellung 0,9999 ... beschrieben wird, durchaus nicht als die Zahl 1 betrachten. Sie besitzt auch einen anderen Informationsgehalt, und die Differenz der beiden Zahlen ergibt dann ein erstes Beispiel für eine infinitesimale Zahl, die von Null verschieden ist.
Der Begriff der hyperreellen Zahl wird hier nicht voll ausgeschärft; die Schüler/innen lernen lediglich, daß jede reelle Zahlenfolge eine hyperreelle Zahl *beschreibt.* (Die genaue Einführung der hyperreellen Zahlen mittels Äquivalenzklassen bleibt einem höheren Leistungsniveau der zwölften Jahrgangsstufe – etwa dem Leistungskurs – überlassen.)
Es läßt sich jedoch auf dieser Grundlage mit hyperreellen Zahlen ganz einfach rechnen, da mit den jeweiligen Folgengliedern der beschreibenden reellen Zahlenfolgen gerechnet wird. Hierbei wird vor allem Gewicht auf die Betrachtung gelegt, in welchem Bereich der hyperreellen Zahlenmenge das Ergebnis der Verknüpfung hyperreeller Zahlen liegt.
Besonderen Nachdruck legen wir auf die Entwicklung einer tragfähigen Anschauung von infinitesimalen und infiniten Zahlen, die den Vorstellungen von „unendlich klein" oder von „unendlich groß" vollkommen entsprechen. Dazu werden unendlich starke Vergrößerungen oder Verkleinerungen der Zahlengeraden herangezogen. Diese sind überhaupt das wesentliche visuelle Hilfsmittel der Analysis mit hyperreellen Zahlen.
Den Abschluß bildet dann die Erkenntnis, daß hyperreelle Zahlen, sofern sie nicht infinit sind, zerlegt werden können in einen reellen und einen infinitesimalen Teil. Der Begriff des reellen Teils einer finiten hyperreellen Zahl entspricht dem Begriff des Grenzwerts in der herkömmlichen Analysis. Vielen Schülerinnen und Schülern fällt es aber leichter, von einem (hyperreellen) Rechenergebnis nur den reellen Teil zu betrachten als den Grenzübergang beim entsprechenden Rechenvorgang zu vollziehen.

Lernvoraussetzungen/Lernziele

Die Schüler/innen müssen elementare Kenntnisse zum Thema Folgen besitzen. Ferner ist es notwendig, daß die Schüler/innen wissen, daß es verschiedene Zahlbereiche für unterschiedliche Problemstellungen gibt. Insbesondere wird auf die Dezimaldarstellung von Zahlen zurückgegriffen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- die verschiedenen Kategorien von Zahlen in $\mathbb{H}$ unterscheiden und Beispiele selbst bilden
- die Grundrechenarten mit hyperreellen Zahlen ausführen
- den reellen Teil finiter hyperreller Zahlen bilden
- beweisen, daß die Funktion RT mit den algebraischen Operationen verträglich ist.

M	Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase	A

I. Folgen und hyperreelle Zahlen

Einstieg/Schaffung von Voraussetzungen

M 1.1 Zahlen und die sie darstellenden Folgen

Anknüpfen an Bekanntes:
- Irrationale Zahlen als Folgen rationaler Zahlen.
- Addition und Vergleich von Zahlenfolgen.

LV/ UG

M 1.2 Übungen

a) Schreiben Sie die ersten fünf Glieder der Dezimalfolgen auf, die folgende reelle Zahlen darstellen:

$$7\ ;\ -17\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \frac{10}{7}\ ;\ \sqrt[3]{5}\ ;\ \lg(2)\ ;\ \frac{3}{8}$$

b) Berechnen Sie gliedweise die ersten fünf Glieder der Folgen zu:

$$\frac{3}{8}+\frac{10}{7}\ ;\ 7-\sqrt[3]{5}\ ;\ 7\cdot\frac{10}{7}$$

c) Stellen Sie mittels der Dezimalfolgen fest, ob $\sqrt{2}$ *oder* $\frac{10}{7}$ *die größere Zahl ist.*

d) Vergleichen Sie die Folgen für 10 und $7\cdot\frac{10}{7}$ *miteinander und beschreiben Sie die Unterschiede!*

TA oder AB EA/PA/ HA/CA

M 1.3 Rechnen mit Folgen

Problematisierung/Erarbeitung

M 1.4 Neue Zahlen

Problem der Neunerperioden — LV
Zwei bekannte Interpretationsmöglichkeiten — UG
Der neue Ansatz — LV
Zur Definition der hyperreellen Zahlen — UG

Ergebnissicherung

M 1.5 Übungen

1. Entscheiden Sie, ob die Folgen reelle oder nicht reelle (hyperreelle) Zahlen beschreiben:

a) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \dots\right)$ *und* $(0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ \dots)$

b) $(\pi;\ \pi;\ \pi;\ \pi;\ \dots)$ *und* $(3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \dots)$

c) $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \dots\right)$ *und* $(0{,}1;\ 0{,}10;\ 0{,}100;\ 0{,}1000;\ \dots)$

TA/HA oder AB

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, A = Arbeitsform, AB = Arbeitsblatt, CA = Computerarbeit, EA = Einzelarbeit, GA = Gruppenarbeit, HA = Hausaufgabe, LV = Lehrervortrag, OH = Overheadprojektor, PA = Partnerarbeit, SV = Schülervortrag, TA = Tafelanschrieb, UG = Unterrichtsgespräch

M | Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase | A

d) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \ldots\right)$ *und* $(0{,}1;\ 0{,}12;\ 0{,}125;\ 0{,}1250;\ \ldots)$

e) Finden Sie weitere Beispiele derartiger Folgenpaare!

2. Bilden Sie die ersten vier Glieder der jeweiligen Differenzenfolge der Beispiele unter 1.
a) Von welchem gemeinsamen Typ sind all diese Differenzen?
b) Worin unterscheiden sich die Differenzen dennoch?

3. Die „echt" hyperreellen Zahlen aus Übungsaufgabe 1 mögen mit a und b bezeichnet werden.
a) Bilden Sie die ersten vier Folgenglieder zu $5a + 5b$*!*
b) Bilden Sie die ersten vier Folgenglieder zu $5(a + b)$*!*
c) Gilt $5a + 5b = 5(a + b)$*?*

4.
a) Bilden Sie die ersten vier Folgenglieder zu $3a - 3b$*!*
b) Bilden Sie die ersten vier Folgenglieder zu $3(a - b)$*!*
c) Gilt $3a - 3b = 3(a - b)$*?*

Problematisierung/Erarbeitung

M 1.6 Unendlich große Zahlen

Das Problem der Kehrwertbildung — UG
Die Zahlen ω und Ω — LV
Zur Definition der infiniten hyperreellen Zahlen — UG

Beispiele für infinite Zahlen: — TA
a) $\Omega + 1 : (2; 3; 4; 5; 6; \ldots$
b) $2\Omega - 3 : (-1; 1; 3; 5; 7; \ldots)$
c) $\Omega^2 : (1; 4; 9; 16; 25; \ldots)$

Ergebnissicherung

M 1.7 Übungen

TA oder AB
EA/PA/CA

1. Berechnen Sie jeweils in Bruchform die ersten vier Glieder der Zahlenfolgen, die folgende Zahlen beschreiben:

a) $5\Omega + 3$ *b)* $3\Omega + 2 - \omega$

c) $\frac{3 + \Omega}{2 - \omega}$ *d)* $\frac{1}{2\Omega - 3}$

2. Gegeben sind Folgendarstellungen hyperreeller Zahlen. Geben Sie jeweils zwei weitere Folgenglieder an und entscheiden Sie, ob eine infinitesimale Zahl, eine finite - nicht infinitesimale - Zahl oder eine infinite Zahl vorliegt.
a) $(0{,}1;\ 0{,}10;\ 0{,}105;\ 0{,}1050;\ 0{,}10505;\ \ldots)$
b) $(2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ \ldots)$
c) $(2{,}0;\ 2{,}00;\ 2{,}000;\ 2{,}0000;\ 2{,}00000;\ \ldots)$
d) $(0{,}2;\ 0{,}04;\ 0{,}006;\ 0{,}0008;\ 0{,}00010;\ 0{,}000012;\ \ldots)$
e) $\left(1;\ 0;\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{3}{5};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{5}{7};\ \ldots\right)$

3. Geben Sie bei 2b) und 2e) mit Hilfe von Ω *oder* ω *die hyperreellen Zahlen an, die durch die Folgen beschrieben werden.*
Hinweis zu e): Erweitern Sie einzelne Brüche in geeigneter Weise.

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, A = Arbeitsform, AB = Arbeitsblatt, CA = Computerarbeit, EA = Einzelarbeit, GA = Gruppenarbeit, HA = Hausaufgabe, LV = Lehrervortrag, OH = Overheadprojektor, PA = Partnerarbeit, SV = Schülervortrag, TA = Tafelanschrieb, UG = Unterrichtsgespräch

M	Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase	A

4. Entscheiden Sie, ob infinitesimale Zahlen, finite – nicht infinitesimale – Zahlen oder infinite Zahlen vorliegen.

a) $3\Omega + 5\omega$ *b)* $2\omega + 3\omega^2 + 0{,}001$

c) $\dfrac{7\omega^2 + 2}{2\omega^2 + 5}$ *d)* $\dfrac{3\Omega^3 - 7}{4\Omega^3 + 9 + \omega}$

e) $\dfrac{3 + \omega}{\omega^2}$ *f)* $\dfrac{3 + \omega}{\omega^2 + 0{,}0001}$

M 1.8 Folgen und Typen hyperreeller Zahlen

Erarbeitung

M 1.9 Die Menge aller hyperreellen Zahlen

Die Grundrechenarten mit hyperreellen Zahlen | UG/LV

M 1.10 Die Grundrechenarten mit hyperreellen Zahlen

TA oder Folie 1

EA/PA/HA

Addition:

+	α	x	A
β			
y			
B			

Subtraktion:

-	α	x	A
β			
y			
B			

Multiplikation:

·	α	x	A
β			
y			
B			

Division:

:	α≠0	x≠0	A
β			
y			
B			

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, A = Arbeitsform, AB = Arbeitsblatt, CA = Computerarbeit, EA = Einzelarbeit, GA = Gruppenarbeit, HA = Hausaufgabe, LV = Lehrervortrag, OH = Overheadprojektor, PA = Partnerarbeit, SV = Schülervortrag, TA = Tafelanschrieb, UG = Unterrichtsgespräch

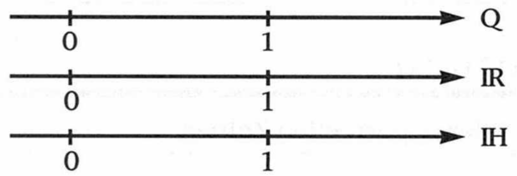
M | Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase | A

2. Veranschaulichung hyperreeller Zahlen

Einstieg

M 2.1 Zahlenmengen und ihre Darstellung

Einer Geraden sieht man nicht von vornherein an, welche Zahlenmenge sie darstellt.

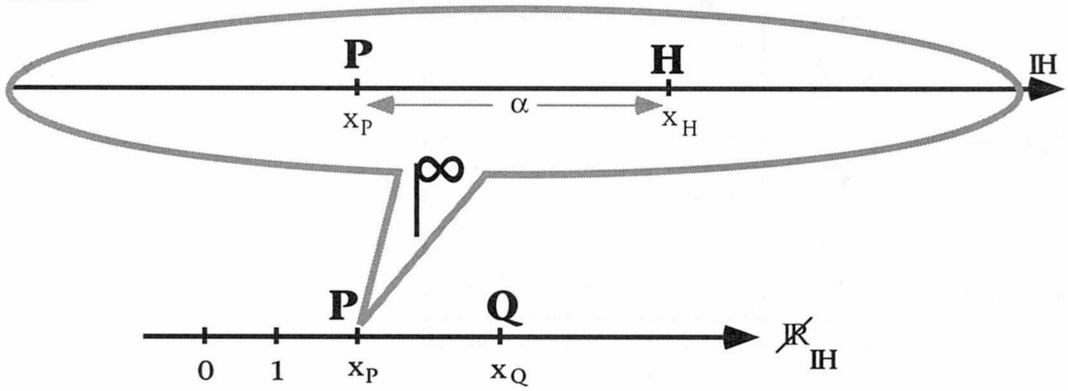


UG/LV
Folie 2a+b

Erarbeitung

M 2.2 Darstellung infinitesimaler Zahlen

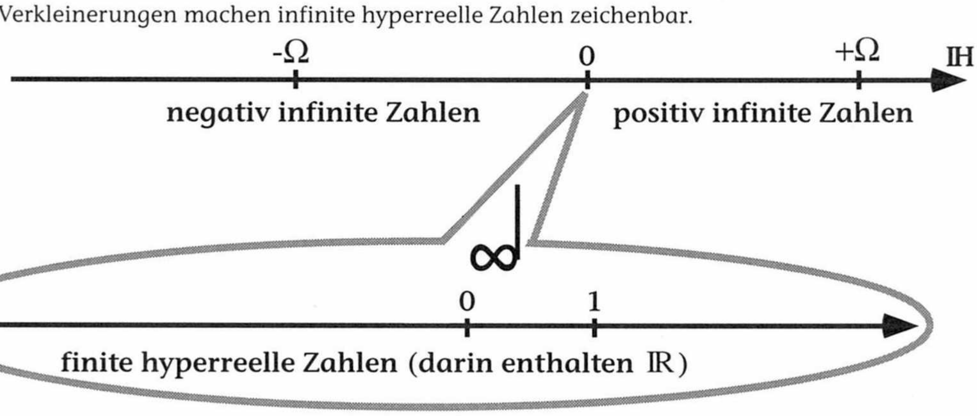
Infinite Vergrößerungen trennen reelle Punkte total! und machen infinitesimal benachbarte zeichenbar.



UG/TA
Folie 2c

M 2.3 Darstellung infiniter Zahlen

Infinite Verkleinerungen machen infinite hyperreelle Zahlen zeichenbar.



UG/TA
Folie 2d

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, A = Arbeitsform, AB = Arbeitsblatt, CA = Computerarbeit, EA = Einzelarbeit, GA = Gruppenarbeit, HA = Hausaufgabe, LV = Lehrervortrag, OH = Overheadprojektor, PA = Partnerarbeit, SV = Schülervortrag, TA = Tafelanschrieb, UG = Unterrichtsgespräch

M	Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase	A

3. Reeller Teil hyperreeller Zahlen

Erarbeitung

M 3.1 Zerlegbarkeit hyperreeller Zahlen

Zur Definition des reellen Teils finiter hyperreeller Zahlen — UG

M 3.2 Der reelle Teil und die Grundrechenarten

Zu den Rechenregeln für den reellen Teil — UG

M 3.3 Der Übergang „finit-infinit“

Die infiniten hyperreellen Zahlen besitzen keinen reellen Teil. — UG

Ergebnissicherung

M 3.4 Übungen

TA/UG

Beispiele:

Bestimmung des reellen Teils hyperreeller Zahlen

a) $\mathrm{RT}\left(5 + \frac{2}{\Omega}\right) = \mathrm{RT}\left(5 + 2\omega\right) = \mathrm{RT}\left(5\right) + \mathrm{RT}\left(2\omega\right) = 5 + 0 = 5$

b) $\mathrm{RT}\left(\frac{2\Omega + 3}{3\Omega - 1}\right) = \mathrm{RT}\left(\frac{\left(2\Omega + 3\right)\omega}{\left(3\Omega - 1\right)\omega}\right) = \mathrm{RT}\left(\frac{2+3\omega}{3-\omega}\right) = \frac{2}{3}$; *man beachte* $\Omega \cdot \omega = 1$

c) $\mathrm{RT}\left(\frac{6\Omega - 3}{2\Omega^2 - \Omega + 1}\right) = \mathrm{RT}\left(\frac{6\omega - 2\omega^2}{2 - \omega + \omega^2}\right) = \frac{\mathrm{RT}\left(6\omega - 2\omega^2\right)}{\mathrm{RT}\left(2 - \omega + \omega^2\right)} = \frac{0}{2} = 0$

Bei Aufgaben dieser Art ist es nicht notwendig, daß die bekannten Zahlen Ω und ω Verwendung finden. Ω kann durch jede andere infinite Zahl Γ und ω durch deren (infinitesimalen) Kehrwert γ, $\gamma = 1/\Gamma$, ersetzt werden.

d) $\mathrm{RT}\left(2 + \frac{3}{\Gamma^2}\right) = \mathrm{RT}\left(2 + 3 \cdot \gamma^2\right) = 2 + 0 = 2$

e) Von $\left(2 + \frac{3}{\gamma^2}\right)$ ***existiert kein reeller Teil, weil diese Zahl gleich*** $\left(2 + 3 \cdot \Gamma^2\right)$ ***und somit infinit ist.***

Legende zum Unterrichtsverlauf

M = Material, A = Arbeitsform, AB = Arbeitsblatt, CA = Computerarbeit, EA = Einzelarbeit, GA = Gruppenarbeit, HA = Hausaufgabe, LV = Lehrervortrag, OH = Overheadprojektor, PA = Partnerarbeit, SV = Schülervortrag, TA = Tafelanschrieb, UG = Unterrichtsgespräch

M	Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase	A
	Übungen: *1. Bestimmen Sie jeweils den reellen Teil folgender Ausdrücke, falls er existiert.* *a)* $3\Omega + 5\omega$ *b)* $2\omega + 3\omega^2 + 0{,}001$ *c)* $\frac{7\omega^2 + 2}{3\omega^2 + 5}$ *d)* $\frac{3\Omega^3 - 7}{4\Omega^3 + 9 + \omega}$ *e)* $\frac{3 + \omega}{\omega^2}$ *f)* $\frac{3 + \omega}{\omega^2 + 0{,}0001}$	TA oder AB EA/PA/CA

M 3.5
DERIVE-Befehle zur Bildung des reellen Teils von Termen mit hyperreellen Zahlen

M 3.6 DERIVE-Befehle zur Erkennung von Typen hyperreeller Zahlen

M 3.7 Reeller Teil hyperreeller Zahlen

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, A = Arbeitsform, AB = Arbeitsblatt, CA = Computerarbeit, EA = Einzelarbeit, GA = Gruppenarbeit, HA = Hausaufgabe, LV = Lehrervortrag, OH = Overheadprojektor, PA = Partnerarbeit, SV = Schülervortrag, TA = Tafelanschrieb, UG = Unterrichtsgespräch

Materialien

M 1.1
Zahlen und die sie darstellenden Folgen

Darstellung der Zahl π als Zahlenfolge

Irrationale Zahlen kann man nur durch Folgen rationaler Zahlen darstellen. Dabei kann z. B. die bekannte Dezimaldarstellung für π als Abkürzung für die Zahlenfolge (3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ...) aufgefaßt werden. Durch die Gegenüberstellung

n	1	2	3	4	...
a_n	3,1	3,14	3,141	3,1415	...

wird deutlich, wie jedem Index n ($n \in \mathbb{N}$) eine rationale Zahl mit n Ziffern hinter dem Komma zugeordnet wird.

Addition und Größenvergleich zweier Zahlenfolgen

Mit den Folgen kann man in $\mathbb{R}$ rechnen. Dabei wendet man die erforderliche Rechenart jeweils auf Folgenglieder mit gleichem Index an, rechnet also gliedweise. Als Beispiel soll zur Zahl π die Zahl 1/2 addiert werden. Dazu benötigt man die bei manchen rationalen Zahlen künstlich anmutenden konstanten Folgen, die aber beim Rechnen in $\mathbb{R}$ tatsächlich gebraucht werden.

Zahl	Dezimalfolge			
π	(3,1;	3,14;	3,141;	3,1415; ...)
+1/2	(0,5;	0,50;	0,500;	0,5000; ...)
π +1/2	(3,6;	3,64;	3,641;	3,6415; ...)

In der Praxis addiert man natürlich nur dasjenige Paar von Folgengliedern, das die gewünschte Genauigkeit liefert.
Der Größenvergleich zweier Zahlen gelingt in vielen Fällen überhaupt nur durch die Darstellung als Zahlenfolgen. Zum Beispiel:

π	3,1	3,14	3,141	3,1415 ...
$\sqrt{10}$	3,1	3,16	3,162	3,1622 ...

Man erkennt: ab dem zweiten Glied sind alle Folgenglieder von $\sqrt{10}$ größer als die von π; also gilt $\pi < \sqrt{10}$,

denn unendlich viele Folgenglieder erfüllen die Ungleichung. Daß es endlich viele nicht tun, ist ohne Bedeutung.

M 1.2 Übungen

a) Schreiben Sie die ersten fünf Glieder der Dezimalfolgen auf, die folgende reelle Zahlen darstellen:

$$7\ ;\ -17\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \frac{10}{7}\ ;\ \sqrt[3]{5}\ ;\ \lg(2)\ ;\ \frac{3}{8}$$

b) Berechnen Sie gliedweise die ersten fünf Glieder der Folgen zu:

$$\frac{3}{8}+\frac{10}{7}\ ;\ 7-\sqrt[3]{5}\ ;\ 7\cdot\frac{10}{7}$$

c) Stellen Sie mittels der Dezimalfolgen fest, ob

$\sqrt{2}$ oder $\frac{10}{7}$ die größere Zahl ist.

d) Vergleichen Sie die Folgen für 10 und $7\cdot\frac{10}{7}$ miteinander und beschreiben Sie die Unterschiede!

zu M 1.2 Lösungen

a)	7	7,0	7,00	7,000	7,0000	...
	-17	-17,0	-17,00	-17,000	-17,0000	...
	$\sqrt{2}$	1,4	1,41	1,414	1,4142	...
	10/7	1,4	1,42	1,428	1,4285	...
	$\sqrt[3]{5}$	1,7	1,70	1,709	1,7099	...
	lg(2)	0,3	0,30	0,301	0,3010	...
	3/8	0,3	0,37	0,375	0,3750	...
b)	3/8 +10/7	1,7	1,79	1,803	1,8035	...
	$7-\sqrt[3]{5}$	5,3	5,30	5,291	5,2901	...
	7· 10/7	9,8	9,94	9,996	9,9995	...

c) $\frac{10}{7} > \sqrt{2}$

d) Die Folge für 10 ist konstant, die für $7\cdot\frac{10}{7}$ ist monoton wachsend.
Die Unterschiede (Differenzen) der Folgenglieder werden immer geringer.

M 1.3 Rechnen mit Folgen

a) Schreiben Sie die ersten fünf Glieder der Dezimalfolgen auf, die folgende reelle Zahlen darstellen: (orientieren Sie sich an den Beispielen!)

Zahl	Dezimalfolge					
$\frac{2}{3}$	(0,6;	0,66;	0,666;	0,6666;	0,66666;	...)
$\sqrt{3}$	(1,7;	1,73;	1,732;	1,7323;	1,73205;	...)
7	;	;	;	;	;	
-17	;	;	;	;	;	
$\sqrt{2}$	;	;	;	;	;	
$\frac{10}{7}$	;	;	;	;	;	
$\sqrt[3]{5}$	;	;	;	;	;	
lg(2)	;	;	;	;	;	
$\frac{3}{8}$	;	;	;	;	;	

b) Berechnen Sie wie im Beispiel gliedweise die ersten fünf Glieder der Folgen zu:

Zahl	Dezimalfolge					
$\frac{2}{3}$	(0,6;	0,66;	0,666;	0,6666;	0,66666;	...)
$+ \sqrt{3}$	(1,7;	1,73;	1,732;	1,7323;	1,73205;	...)
$\frac{2}{3} + \sqrt{3}$	(2,3;	2,39;	2,398;	2,3986;	2,39871;	...)
$\frac{3}{8}$	;	;	;	;	;	
$+ \frac{10}{7}$	;	;	;	;	;	
$\frac{3}{8} + \frac{10}{7}$	;	;	;	;	;	
7	;	;	;	;	;	
$- \sqrt[3]{5}$	;	;	;	;	;	
$7 - \sqrt[3]{5}$	;	;	;	;	;	
7	;	;	;	;	;	
$\cdot \frac{10}{7}$	;	;	;	;	;	
$7 \cdot \frac{10}{7}$	;	;	;	;	;	

M 1.4 Neue Zahlen

Eine schwierige Situation

Das Rechnen mit Folgen kann zu unerwarteten Situationen führen.
Dazu sei das Rechenbeispiel $9 \times \frac{1}{9} = 1$ betrachtet:

9	9	9	9	9	...
$\frac{1}{9}$	0,1	0,11	0,111	0,1111	...
1	0,9	0,99	0,999	0,9999	...

Es entsteht für die Zahl 1 zusätzlich zur konstanten Folge $\left(a_n\right) = (1)$ eine weitere, nämlich die monoton wachsende Folge $\left(b_n\right) = (1 - 10^{-n})$.

Der Unterschied beider Folgen ist:

a	1,0	1,00	1,000	1,0000	...
b	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
a - b = d	0,1	0,01	0,001	0,0001	...

Mit dieser Situation kann man auf drei Weisen umgehen:

Zwei bekannte Auswege

(1) Für jede reelle Zahl soll es nur eine dezimale Näherungsfolge geben, zum Beispiel für $\sqrt{2}$ ausschließlich die Folge (1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...). Folgen mit „Neunerperioden", z. B. die Folge (0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; ...), werden demnach gar nicht zugelassen, sondern durch eine andere Folge, hier (1,0; 1,00; 1,000; 1,0000;...) ersetzt. So arbeiten beispielsweise die meisten Taschenrechner und ersetzen die Zahl $0,\overline{9}$ automatisch durch die Zahl 1.

(2) Beide Folgen (a_n) und (b_n) aus der letzten Tabelle werden als gleichwertige Darstellung der Zahl 1 angesehen. Maßgeblich dafür ist, daß die Differenzfolge (d_n) eine Null-Folge ist, bei der von Folgenglied zu Folgenglied immer mehr Nullen vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer auftreten. Die Ziffernfolge (d_n) ist damit auch eine zulässige Darstellung der Zahl 0 (eine „Nullfolge"). Diese Art der Zusammenfassung gleichwertiger Folgen zu jeweils einer Folgenklasse kennzeichnet die Theorie der reellen Zahlen.

Der neue Ansatz

(3) Die beiden Folgen (a_n) und (b_n) beschreiben zwei verschiedene, sogenannte hyperreelle Zahlen a und b. Die Folgen sind also verschiedene Objekte mit verschiedenem Informationsgehalt.
Die hyperreelle Zahl a ist dabei nichts anderes als die vormals reelle Zahl 1 (erkennbar an der Konstanz der Folge).
Die Zahl b ist „echt" hyperreell; sie hat kein reelles Gegenstück, da es nicht möglich ist, sie durch eine konstante Folge zu beschreiben.
(Für unser Ausgangsproblem bedeutet das, daß die Folge (0,1; 0,11; 0,111; 0,1111; ...) eine von $\frac{1}{9}$ **verschiedene** Zahl darstellt. Die Zahl $\frac{1}{9}$ wird durch die Folge $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \ldots\right)$ beschrieben.)

Die Folge (d_n) beschreibt eine hyperreelle Zahl d, die ebenfalls kein reelles Gegenstück besitzt.
Die Theorie der hyperreellen Zahlen beschreibt eine Erweiterung der Menge der reellen Zahlen und wird anschließend genauer betrachtet.

Hyperreelle Zahlen

Wir fassen zusammen:

Definition 1
Jede Folge reeller Zahlen ist die Darstellung einer hyperreellen Zahl.
Es sei IH die Menge aller hyperreellen Zahlen.

Das obige Beispiel zeigt, daß es unterschiedliche Arten hyperreeller Zahlen gibt:
(1) Die hyperreelle Zahl a ist nichts anderes als die reelle Zahl 1.
(2) Die Zahl b ist ebenfalls hyperreell, aber ohne reelles Gegenstück. Sie ist verschieden von der Zahl a, weil sie von einer vollkommen anderen Folge dargestellt wird.
(3) Die Zahl d ist ebenfalls ohne reelles Gegenstück. Speziell hat sie die Eigenschaft, kleiner als jede positive reelle Zahl und größer als jede negative reelle Zahl zu sein; kurz: $d < |r|$. Denn bei jedem Größenvergleich von d mit einer reellen Zahl r wird ein Index n der Folge auftreten, ab dem $d_n < |r_n|$ $(=|r|)$ gilt. Daher nennt man d eine **Infinitesimalzahl.**

Die Menge IR läßt sich als eine Teilmenge in IH wiederfinden, weil jede konstante Folge eine reelle Zahl beschreibt.
Die Zahl 0 ist eine Infinitesimalzahl, da sie kleiner als der Betrag jeglicher anderer reeller Zahl ist. Sie ist die einzige reelle Zahl mit dieser Eigenschaft.
Das Beispiel macht auch deutlich, daß man mit hyperreellen Zahlen ganz normal rechnen kann. Man verknüpft einfach die Folgenglieder mit gleichem Index miteinander.

Außerdem halten wir fest:
Weil a - b eine Infinitesimalzahl ist, nennen wir a und b **infinitesimal benachbart.**
Die hyperreelle Zahl b läßt sich aus einer reellen Zahl und einer Infinitesimalzahl zusammensetzen: b = a + (-d).

M 1.5 Übungen

1. Entscheiden Sie, ob die Folgen reelle oder nicht reelle (hyperreelle) Zahlen beschreiben:

a) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \ldots\right)$ und $(0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ \ldots)$

b) $(\pi;\ \pi;\ \pi;\ \pi;\ \ldots)$ und $(3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots)$

c) $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \ldots\right)$ und $(0{,}1;\ 0{,}10;\ 0{,}100;\ 0{,}1000;\ \ldots)$

d) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \ldots\right)$ und $(0{,}1;\ 0{,}12;\ 0{,}125;\ 0{,}1250;\ \ldots)$

e) Finden Sie weitere Beispiele derartiger Folgenpaare!

2. Bilden Sie die ersten vier Glieder der jeweiligen Differenzenfolge der Beispiele unter 1.
a) Von welchem gemeinsamen Typ sind all diese Differenzen?
b) Worin unterscheiden sich die Differenzen dennoch?

3. Die „echt“ hyperreellen Zahlen aus Übungsaufgabe 1 mögen mit a und b bezeichnet werden.
a) Bilden Sie die ersten vier Folgenglieder zu $5a + 5b$!
b) Bilden Sie die ersten vier Folgenglieder zu $5(a + b)$!
c) Gilt $5a + 5b = 5(a + b)$?

4.
a) Bilden Sie die ersten vier Folgenglieder zu $3a - 3b$!
b) Bilden Sie die ersten vier Folgenglieder zu $3(a - b)$!
c) Gilt $3a - 3b = 3(a - b)$?

zu M 1.5 Lösungen

1. Alle Folgen stellen hyperreelle Zahlen dar.
a) und **b)**: die konstanten Folgen stellen die reellen Zahlen $\frac{1}{3}$ und π dar, die anderen Folgen stellen dazu infinitesimal benachbarte „echt“ hyperreelle Zahlen dar.
c) und **d)**: je zwei Folgen stellen die reellen Zahlen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{8}$ dar.

2.

1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	...
- a	0,3	0,33	0,333	0,3333	...
d_a	0.0333333...	0,0033333...	0,0003333...	0,0000333...	...
π	π	π	π	π	...
- b	3,1	3,14	3,141	3,1415	...
d_b	0,04159265...	0,00159265...	0,00059265...	0,00009265...	...
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	...
- c	0,1	0,10	0,100	0,1000	...
d_c	0	0	0	0	...
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	...
- d	0,1	0,12	0,125	0,1250	...
d_d	0.0250000...	0,0050000...	0	0	...

a) Alle Differenzenfolgen sind Nullfolgen; sie stellen Infinitesimalzahlen dar.
b) Bei den ersten beiden ist kein Folgenglied Null; bei den beiden anderen sind alle (bzw. fast alle) Folgenglieder Null. Die beiden letzten Folgen stellen die Zahl 0 dar.

3.

5a + 5b	17,0	17,35	17,370	17,3740 ...

Es gilt $5a + 5b = 5(a+b)$.

4.

3a - 3b	-8,4	-8,43	-8,424	-8,4246 ...

Es gilt $3a - 3b = 3(a - b)$.

zu M 1.5 Lösungen mit DERIVE 3.0

```
PrecisionDigits:=4

a1:=[1/3,1/3,1/3,1/3]
a2:=[0.3,0.33,0.333,0.3333]

#6 a1-a2

;Simp(#6)
[1/30,1/300,1/3000,1/30000]

;Approx(#6)
[1/30,1/300,10/3*10^(-4),10/3*10^(-5)]

b1:=[pi,pi,pi,pi]
b2:=[3.1,3.14,3.141,3.1415]

#11 b1-b2

;Approx(#11)
[47/1130,9/5650,310000/52093*10^(-4),
1000000/107011*10^(-5)]

c1:=[1/10,1/10,1/10,1/10]
c2:=[0.1,0.1,0.1,0.1]

#15 c1-c2

;Simp(#15)
[0,0,0,0]

d1:=[1/8,1/8,1/8,1/8]
d2:=[0.1,0.12,0.125,0.125]

#19 d1-d2

;Approx(#19)
[0.025,0.005,0,0]

#22 5*a2+5*b2

;Approx(#22)

[17,17.35,15164/873,17.374]

#24 5*(a2+b2)

;Approx(#24)
[17,17.35,17.37,6550/377]

#26 3*a2-3*b2

;Approx(#26)
[-8.4,-8.43,-10252/1217,-2957/351]

#28 3*(a2-b2)

;Approx(#28)
[-8.4,-8.43,-10252/1217,-5754/683]
```

M 1.6 Unendlich große Zahlen

Das Problem der Kehrwertbildung

Die Grundrechenarten Addition, Subtraktion und Multiplikation infinitesimaler Zahlen liefern stets wieder infinitesimale Zahlen (vgl. M1.9).
Anders verhält es sich bei der Division oder bei der Kehrwertbildung mit infinitesimalen Zahlen. Betrachten wir z. B. die Folge $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right)$, die eine Infinitesimalzahl darstellt. Diese Zahl soll ω heißen.

Welcher Art ist dann die Zahl $\frac{1}{\omega}$?

ω	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\ldots$
$\Omega = \frac{1}{\omega}$	1	2	3	4	$\ldots$

Wie man sieht, wird die Zahl Ω durch die Folge der natürlichen Zahlen dargestellt, $\Omega:=(1; 2; 3; 4; \ldots)$. Die Zahl Ω ist größer als jede (positive) reelle Zahl r. Denn beim Größenvergleich mit irgendeiner reellen Zahl r wird immer ein Index n der Folge (n) von Ω auftreten, ab dem $n > r$ gilt. Diese Eigenschaft genügt! Auch hier müssen nicht alle Paare von Folgengliedern die Ungleichung erfüllen!

Neuartige hyperreelle Zahlen

Die Zahl $\frac{1}{\omega}$ legt nahe, sogenannte infinite Zahlen zu definieren:

Definition 2
Eine hyperreelle Zahl Γ heißt positiv infinit, falls sie größer als jede reelle Zahl ist.
Eine hyperreelle Zahl Δ heißt negativ infinit, falls sie kleiner als jede reelle Zahl ist. Alle anderen Zahlen heißen finit.

Der letzte Satz bedeutet insbesondere, daß die reellen Zahlen einschließlich ihrer infinitesimalen Nachbarn, also auch die infinitesimalen Zahlen selbst, unter dem Begriff „finit“ zusammengefaßt werden.

M 1.7 Übungen

1. Berechnen Sie jeweils in Bruchform die ersten vier Glieder der Zahlenfolgen, die folgende Zahlen beschreiben:
a) $5\Omega + 3$
b) $3\Omega + 2 - \omega$
c) $\frac{3 + \Omega}{2 - \omega}$
d) $\frac{1}{2\,\Omega - 3}$

2. Gegeben sind Folgendarstellungen hyperreeller Zahlen. Geben Sie jeweils zwei weitere Folgenglieder an und entscheiden Sie, ob eine infinitesimale Zahl, eine finite – nicht infinitesimale – Zahl oder eine infinite Zahl vorliegt.
a) (0,1; 0,10; 0,105; 0,1050; 0,10505; ...)
b) (2; 5; 8; 11; 14; ...)
c) (2,0; 2,00; 2,000; 2,0000; 2,00000; ...)
d) (0,2; 0,04; 0,006; 0,0008; 0,00010; 0,000012; ...)
e) $\left(1; 0; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{5}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{7}; \ldots\right)$

3. Geben Sie bei 2b) und 2e) mit Hilfe von Ω oder ω die hyperreellen Zahlen an, die durch die Folgen beschrieben werden.
Hinweis zu e): Erweitern Sie einzelne Brüche in geeigneter Weise.

4. Entscheiden Sie, ob infinitesimale Zahlen, finite – nicht infinitesimale – Zahlen oder infinite Zahlen vorliegen.
a) $3\Omega + 5\omega$
b) $2\omega + 3\omega^2 + 0{,}001$
c) $\frac{7\omega^2 + 2}{3\omega^2 + 5}$
d) $\frac{3\Omega^3 - 7}{4\Omega^3 + 9 + \omega}$
e) $\frac{3 + \omega}{\omega^2}$
f) $\frac{3 + \omega}{\omega^2 + 0{,}0001}$

zu M 1.7 Lösungen

1.

a)

5	5	5	5	5	...
Ω	1	2	3	4	...
3	3	3	3	3	...
5Ω +3	8	13	18	23	...

b)

3	3	3	3	3	...
Ω	1	2	3	4	...
2	2	2	2	2	...
ω	1	1/2	1/3	1/4	...
3Ω +2-ω	4	15/2	32/3	55/4	...

c)

3	3	3	3	3	...
Ω	1	2	3	4	...
2	2	2	2	2	...
ω	1	1/2	1/3	1/4	...
$\frac{3+\Omega}{2-\omega}$	4	10/3	18/5	4	...

d)

1	1	1	1	1	...
2	2	2	2	2	...
Ω	1	2	3	4	...
3	3	3	3	3	...
$\frac{1}{2\Omega-3}$	-1	1	1/3	1/5	...

2.

a) (0,1; 0,10; 0,105; 0,1050; 0,10505; 0,105050; 0,1050505; ...) positiv finit – nicht infinitesimal
b) (2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; ...) positiv infinit
c) (2,0; 2,00; 2,000; 2,0000; 2,00000; 2,000000; 2,0000000; ...) finit – nicht infinitesimal – reell – natürlich
d) (0,2; 0,04; 0,006; 0,0008; 0,00010; 0,000012; 0,0000014; 0,00000016; ...) positiv infinitesimal

e) $\left(1;\ 0;\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{3}{5};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{5}{7};\ -\frac{6}{8};\ -\frac{7}{9};\ \ldots\right)$

negativ finit – nicht infinitesimal

3.

2b) $3\Omega - 1$ oder $\frac{3}{\omega}-1$

2e) $\frac{2-\Omega}{\Omega}$ oder $\omega(2-\Omega)$

4.

a) positiv infinit
b) positiv finit – nicht infinitesimal
c) positiv finit – nicht infinitesimal
d) positiv finit – nicht infinitesimal
e) positiv infinit
f) positiv finit – nicht infinitesimal

zu M 1.7 Lösungen mit DERIVE 3.0

```
PrecisionDigits:=4

"auf die ersten 4 Glieder beschränkt ist:"

Ω:=VECTOR(i,i,1,4)

Omega:=VECTOR(1/i,i,1,4)

"hyperreelle 2, 3  bzw. 5"

h2:=VECTOR(2,i,1,4)

h3:=VECTOR(3,i,1,4)

h5:=VECTOR(5,i,1,4)

"Für + und - Vektoroperationen"
"für * und : Definitionen MLT und DVS"

MLT(V1,V2):=VECTOR(ELEMENT(V1,i)
   *ELEMENT(V2,i),i,1,4)
DVS(V1,V2):=VECTOR(ELEMENT(V1,i)
   /ELEMENT(V2,i),i,1,4)

"MLT(h5, Ω) + h3 oder auch 5·Ω + h3"

MLT(h5,omega)+h3

#43 5*omega+h3

;Simp(#43)
[8,13,18,23]

#46 3*omega+h2-Omega

;Simp(#46)
[4,15/2,32/3,55/4]

#48 DVS(h3+omega,h2-Omega)

;Simp(#48)
[4,10/3,18/5,4]

#50 DVS([1,1,1,1],MLT(h2,omega)-h3)

;Simp(#50)
[-1,1,1/3,1/5]
```

M 1.8 Folgen und Typen hyperreeller Zahlen

1) Berechnen Sie wie in den Beispielen jeweils in Bruchform die ersten vier Glieder der Zahlenfolgen, die folgende Zahlen beschreiben:

Zahl	**Dezimalfolge**					
$2\Omega + 1$	(3;	5;	7;	9;	11;	...)
$\frac{2+\Omega}{5-\omega}$	($\frac{3}{4}$;	$\frac{8}{9}$;	$\frac{15}{14}$;	$\frac{24}{19}$;	$\frac{35}{24}$;	...)
$5\Omega + 3$	;	;	;	;	;	
$\Omega - \omega$	;	;	;	;	;	
$3\Omega + 2 - \omega$	;	;	;	;	;	
$\frac{3+\Omega}{2-\omega}$	;	;	;	;	;	
$\frac{1}{2\Omega-3}$	;	;	;	;	;	

2) Gegeben sind Folgendarstellungen hyperreeller Zahlen.
Geben Sie wie in den Beispielen jeweils zwei weitere Folgenglieder an und entscheiden Sie, ob eine infinitesimale Zahl, eine finite – nicht infinitesimale – Zahl oder eine infinite Zahl vorliegt.

Dezimalfolge							**Typ**
(0,6;	0,66;	0,666;	0,6666;	0,66666;	0,666666;	0,6666666; ...)	finit
(0,7;	0,07;	0,007;	0,0007;	0,00007;	0,000007;	0,0000007; ...)	infinitesimal
(0,1;	0,10;	0,105;	0,1050;	0,10505;		; ...)	
(2,0;	5,00;	8,000;	11,0000;	14,00000;		; ...)	
(2,0;	2,00;	2,000;	2,0000;	2,00000;		; ...)	
(0,2;	0,04;	0,006;	0,0008;	0,00010;	0,000012;	; ...)	
(1,0;	0,00;	$-\frac{1}{3}$;	$-\frac{1}{2}$;	$-\frac{3}{5}$;	$-\frac{2}{3}$;	$-\frac{5}{7}$; ...)	

3) Geben Sie wie in den Beispielen mit Hilfe von Ω oder ω die hyperreellen Zahlen an, die durch die Folgen beschrieben werden.

Dezimalfolge							**Zahl**
(4;	7;	10;	13;	17;		...)	$3\Omega + 1$
($\frac{2}{1}$;	$\frac{1}{2}$;	$\frac{0}{3}$;	$-\frac{1}{4}$;	$-\frac{2}{5}$;		...)	$\frac{3-\Omega}{\Omega} = \left(3-\Omega\right)\omega = 3\omega - 1$
(2;	5;	8;	11;	14;		...)	
(2;	$\frac{3}{2}$;	$\frac{4}{3}$;	$\frac{5}{4}$;	$\frac{6}{5}$;		...)	
(2;	$\frac{5}{2}$;	$\frac{10}{3}$;	$\frac{17}{4}$;	$\frac{26}{5}$;		...)	
(1;	0;	$-\frac{1}{3}$;	$-\frac{1}{2}$;	$-\frac{3}{5}$;	$-\frac{2}{3}$;	$-\frac{5}{7}$; ...)	

Folie 1

M 1.10 Die Grundrechenarten mit hyperreellen Zahlen

Addition hyperreeller Zahltypen

$+$	α	x	A
β			
y			
B			

Subtraktion hyperreeller Zahltypen

$-$	α	x	A
β			
y			
B			

Multiplikation hyperreeller Zahltypen

$\cdot$	α	x	A
β			
y			
B			

Division hyperreeller Zahltypen

$:$	$\alpha \neq 0$	$x \neq 0$	A
β			
y			
B			

M 1.9 Die Menge aller hyperreellen Zahlen

Die Grundrechenarten

Das Rechnen mit hyperreellen Zahlen folgt denselben Regeln wie das Rechnen mit reellen Zahlen. Es ist aber sehr hilfreich, wenn man einige grundsätzliche Rechenergebnisse kennt. Zum Beispiel:

Satz 1
Für alle infinitesimalen Zahlen α und β und jede reelle Zahl r gilt: $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ und $\alpha \cdot r$ sind ebenfalls infinitesimal.

Beweis:
Zu zeigen ist, daß für jede positive reelle Zahl s gilt:
$|\alpha+\beta|<s$, $|\alpha\cdot\beta|<s$ und $|\alpha\cdot r|<s$.
Vorausgesetzt wird, daß $|\alpha|$ kleiner ist als jegliche positive reelle Zahl p und daß $|\beta|$ kleiner ist als jegliche positive reelle Zahl q. p und q sind also frei, so daß man sie geeignet wählen kann.

a) Wir wählen $p = q = \frac{s}{2}$ also ist $|\alpha| < \frac{s}{2}$ und auch $|\beta| < \frac{s}{2}$, dann ist $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta| < \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = s$.

b) Wir wählen p = s und q = 1; also ist $|\alpha| < s$ und $|\beta| < 1$, somit $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta| < s\cdot 1 = s$.

c) Wir wählen $p = \frac{s}{|r|}$; also ist $|\alpha| < \frac{s}{|r|}$, somit ist $|\alpha\cdot r| = |\alpha|\cdot|r| < \frac{s}{|r|}\cdot|r| = s$.

Für die Grundrechenarten in IH sollen nun Rechentabellen erstellt werden. Dabei sollen folgende Bezeichnungen gelten:
A, B, Γ seien infinite Zahlen.
(Sprechweise: groß Alpha, groß Beta, groß Gamma)
f bezeichne finite Zahlen mit den Spezialfällen:
α, β, γ für infinitesimale Zahlen und
x, y, z für reelle Zahlen.

Addition und Subtraktion

Addiert man eine infinitesimale Zahl zu einer reellen Zahl, so ist die Summe finit. Kurz: **β + x = f.** Mit entsprechenden Überlegungen kann man die ganze Additionstabelle ausfüllen. Dabei gilt es zu beachten, daß sich über die Summe zweier infiniter Zahlen allgemein nichts sagen läßt. Beispielsweise ist nämlich $\Omega + \Omega = 2\Omega$ infinit, aber $\Omega + (-\Omega) = 0$ finit, sogar infinitesimal. Die Tabelle erhält dann an dieser Stelle ein Fragezeichen, um anzudeuten, daß eine genauere Kenntnis der beteiligten Zahlen nötig ist.

+	α	**x**	A
β	γ	**f**	Γ
y	f	z	Γ
B	Γ	Γ	?

Genauso geht man bei der Subtraktionstabelle vor.

–	α	x	A
β	γ	f	Γ
y	f	z	Γ
B	Γ	Γ	?

Multiplikation und Division

Bei der Multiplikation und Division hyperreeller Zahlen kann in einigen Fällen ebenfalls nicht von vornherein gesagt werden, welchem Zahlentyp das Ergebnis zuzuordnen ist. Wieder benötigt man dazu genauere Informationen über die beteiligten Zahlen.

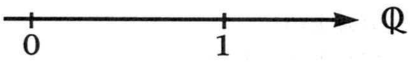
Beispiele:

·	α	x	A
β	γ	γ	?
y	γ	z	Γ
B	?	Γ	Γ

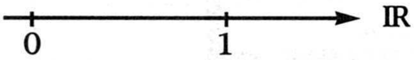
:	α≠0	x≠0	A
β	?	γ	γ
y	Γ	z	γ
B	Γ	Γ	?

M 2.1 Zahlenmengen und ihre Darstellung

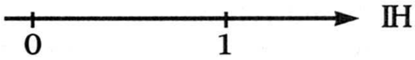
Im Gegensatz zu den Zahlenmengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ ist die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ „dicht". Das bedeutet, daß jeder, der zwei beliebige rationale Zahlen nennt, immer auch eine zwischen den beiden liegende angeben kann. Will man nun $\mathbb{Q}$ oder Intervalle aus $\mathbb{Q}$ graphisch darstellen, so muß man eine durchgezogene (gerade) Linie zeichnen.



Erweitert man $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$, so befinden sich die irrationalen Zahlen zwischen den rationalen. Die graphische Darstellung von $\mathbb{R}$ unterscheidet sich – bis auf die Bezeichnung – nicht von der der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$; sie bleibt eine Gerade, nun aber mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

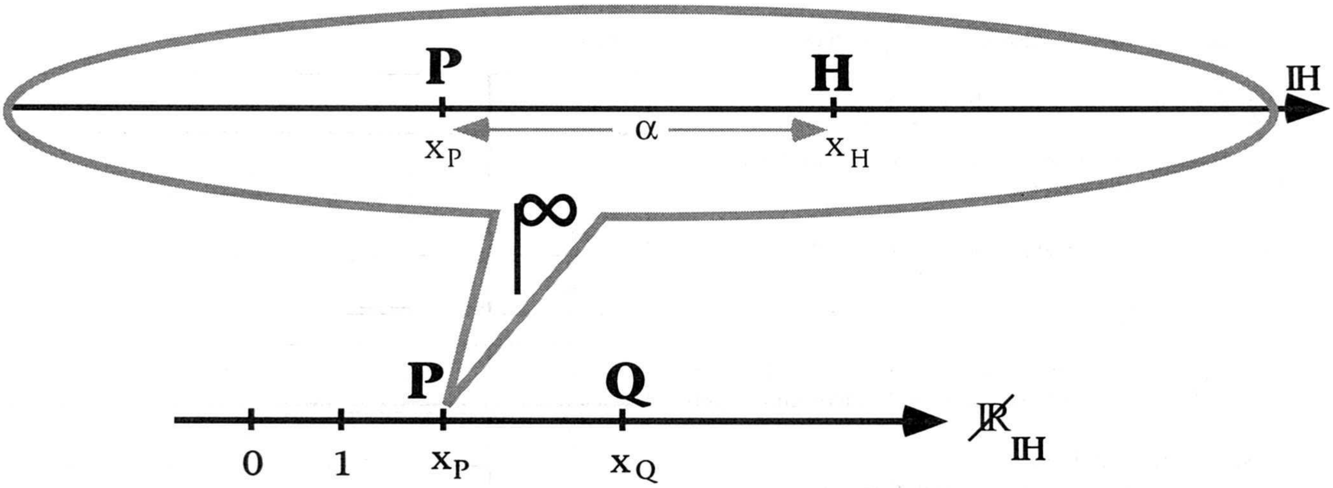


Genauso verhält es sich bei der Erweiterung nach $\mathbb{H}$. Die Veranschaulichung ist eine Gerade.



Auch bei Vergrößerungen oder Verkleinerungen entstehen – wegen der Dichtheit von Q, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{H}$ – keine Lücken. Einer Geraden sieht man also nicht von vornherein an, welche Zahlenmenge sie darstellt. Dazu muß man sie bezeichnen und gegebenenfalls Einheiten festlegen. Insbesondere gilt dies auch für die Darstellung infiniter und infinitesimaler Zahlen.

M 2.2 Darstellung infinitesimaler Zahlen



Unten im Bild sehen wir – wie gewohnt – einen Ausschnitt der reellen Zahlengeraden; zwei Punkte P und Q mit ihren reellen Koordinaten x_P und x_Q sind hervorgehoben. Auch bei der Erweiterung nach $\mathbb{H}$ ändert sich an der Zeichnung nichts; wir ersetzen nur die Bezeichnung $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{H}$.

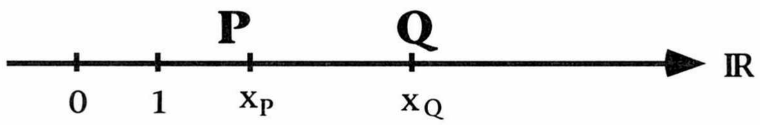
Jeder Punkt H mit einer hyperreellen Koordinate x_H, $x_H = x_P + \alpha$, der zu P infinitesimal benachbart ist, fällt zeichnerisch mit P zusammen. Das ist leicht einzusehen. Wollen wir nämlich für α – wie im Bild dargestellt – 4,5 Einheiten erhalten, müßten wir eine infinite Maßstabsvergrößerung mit dem Faktor $\frac{4{,}5}{\alpha}$ durchführen.

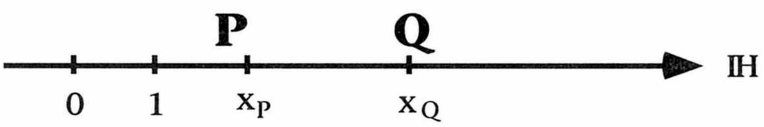
Um P und H unterscheidbar zu machen, schauen wir uns die hyperreell erweiterte Gerade beim Punkt P durch eine „Unendlichkeitsbrille" an. Sie zeigt uns diese Gerade unendlich stark vergrößert, nämlich mit dem infiniten Faktor $\frac{4{,}5}{\alpha}$. Diese Vergrößerung ist stärker als es je ein reeller Zahlenfaktor ausdrücken könnte. Wir sehen so einen Ausschnitt der hyperreellen Geraden mit lauter „hyperreellen Punkten" (Punkten mit hyperreellen Koordinaten). Unter ihnen kann höchstens einer reell sein, nämlich derjenige Punkt P, an dem vergrößert wurde. Anders ausgedrückt: Wir sehen höchstens den Punkt P mit seiner reellen Koordinate x_P und um ihn herum nur hyperreelle, nicht reelle Punkte wie H.

Der ebenfalls reelle Punkt Q mit seiner Koordinate x_Q ist durch die infinite Vergrößerung unendlich weit weggerückt. Hätte nämlich ein beliebiger von P verschiedener Punkt H ebenfalls reelle Koordinaten, dann wäre der Abstand $|x_H - x_P|$ der beiden Punkte H und P von Null verschieden und auch reell. Wäre H das Bild von Q nach der Vergrößerung, so wäre der Vergrößerungsfaktor der „Brille" gleich $\frac{x_Q - x_P}{x_H - x_P}$. Er wäre, da ausschließlich mit reellen Zahlen gerechnet würde, ebenfalls reell und nicht infinit wie vorausgesetzt.

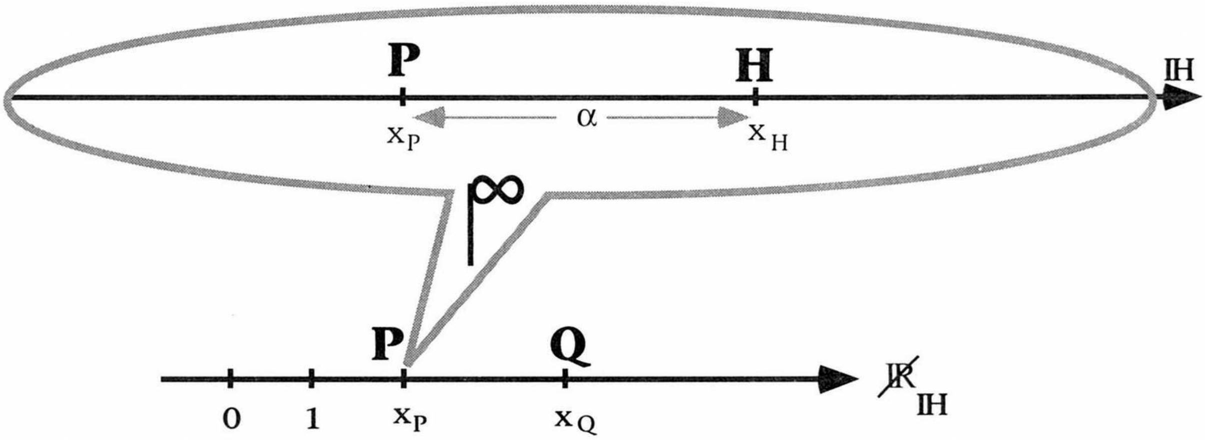
Folie 2

Veranschaulichung hyperreeller Zahlen

a) 

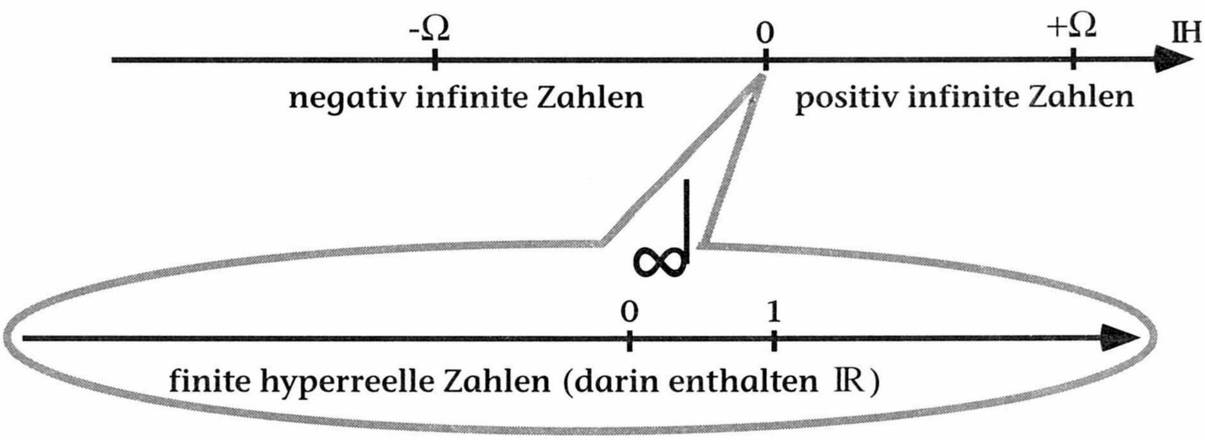
b) 

c) Infinite Vergrößerung einer Stelle der hyperreellen Zahlengraden



Abbildungsfaktor: $\frac{4,5}{\alpha}$

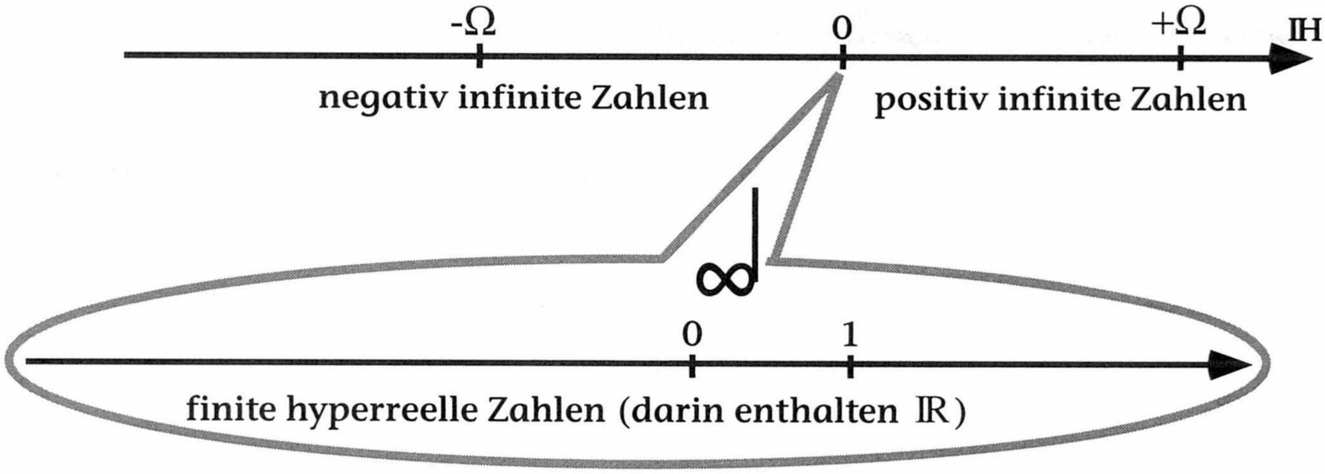
d) Infinite Verkleinerung der hyperreellen Zahlengraden



Abbildungsfaktor: $\frac{2}{\Omega}$

M 2.3 Darstellung infiniter Zahlen

Benutzt man die Unendlichkeitsbrille „umgedreht", so wird die hyperreelle Zahlengerade infinit verkleinert. Damit zum Beispiel der Abstand von 0 bis Ω die Größe zwei Einheiten erhält, müssen wir den Maßstab der hyperreellen Zahlengeraden mit dem infinitesimalen Faktor $\frac{2}{\Omega}$ verändern. Die Teilmenge aller finiten Zahlen „schrumpft" dadurch auf einen Punkt in der Zeichnung zusammen – im Bild aus Gründen der Symmetrie mit 0 bezeichnet, obwohl jede andere finite Zahl sich ebenfalls an dieser Stelle befindet. Alle finiten Zahlen sind bei dieser Verkleinerung genauso um die Null zu denken wie bei üblicher Darstellung infinitesimale Zahlen um ihren reellen Nachbarn herum. Durch diese starke Verkleinerung können infinite Zahlen überhaupt erst sichtbar werden, da sie ins Endliche gerückt sind.



M 3.1 Zerlegbarkeit hyperreeller Zahlen

Wir wissen bereits, daß alle reellen Zahlen sich im Körper $\mathbb{H}$ wiederfinden lassen; ist r eine reelle Zahl, so wird ihr hyperreelles Gegenstück (der Einfachheit halber ebenfalls mit r bezeichnet) durch die konstante Zahlenfolge (r_n) mit $r_n = r$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) beschrieben.
Wir können also schreiben $\mathbb{R} \in \mathbb{H}$.
An Beispielen wurde bereits deutlich, daß die reellen Zahlen innerhalb der finiten hyperreellen Zahlen derart liegen, daß jede finite hyperreelle Zahl eine reelle Zahl in infinitesimaler Nachbarschaft besitzt. Es gilt:

> ***Satz 2***
> ***Jede finite hyperreelle Zahl h läßt sich als Summe einer reellen Zahl r – ihrem reellen Teil – und einer infinitesimalen Zahl α – ihrem infinitesimalen Teil – schreiben: $h = r + \alpha$.***
> ***Die Zahlen r, α sind eindeutig bestimmt.***

Beweis der Eindeutigkeit des reellen Teils:
Wäre außer mit $h = r + \alpha$ zusätzlich mit $h = s + \beta$ eine zweite Zerlegung gegeben (r und s reell, α und β infinitesimal), so wäre $r + \alpha = s + \beta$ und gleichwertig damit $r - s = \beta - \alpha$. Weil auf der linken Seite dieser Gleichung eine reelle Zahl, auf der rechten Seite eine infinitesimale Zahl steht, kann diese Gleichung nur auf beiden Seiten durch Null erfüllt sein, denn Null ist die einzige reelle Zahl, die zugleich infinitesimal ist. Daraus folgt, daß die reellen Teile r und s und die infinitesimalen Teile α und β jeweils übereinstimmen. Die Zerlegung ist also eindeutig.

> ***Definition 3***
> ***Der eindeutig bestimmte reelle Teil einer hyperreellen Zahl h soll abkürzend mit RT(h) bezeichnet werden.***

Speziell ist die Zahl 0 der reelle Teil jeder infinitesimalen Zahl α, denn es gilt $\alpha = 0 + \alpha$.

M 3.2
Der reelle Teil und die Grundrechenarten

Der folgende Satz zeigt, daß RT, also die Bildung des reellen Teils, mit den algebraischen Operationen verträglich ist.

> ***Satz 3***
> ***Für alle finiten hyperreellen Zahlen g und h gilt:***
> ***1) RT(g+h) = RT(g) + RT(h) ,***
> ***2) RT(g-h) = RT(g) - RT(h) ,***
> ***3) RT(g·h) = RT(g) · RT(h) ,***
> ***4) RT(g/h) = RT(g) / RT(h) , falls RT(h) ≠ 0 .***

Beispiel: $\left(\frac{2+3\omega}{3-\omega}\right) = \frac{2}{3}$.

Es ist nämlich RT(2+3ω) = 2 , RT(3-ω) = 3 und RT $\left(\frac{2+3\omega}{3-\omega}\right)$ $= \frac{RT(2+3\omega)}{RT(3-\omega)}$.

Beweis von Satz 3:
zu 1)
Es sei g = r + α, h = s + β (also r = RT(g), s = RT(h), α und β infinitesimal).
Variante a)
Dann ist RT(g+h) = RT((r + α)+(s + β)) = RT((r+s) + (α + β)) = r + s = RT(g) + RT(h).
Variante b)
Es ist (g+h) - (r+s) infinitesimal, denn:
((r+α) + (s+β)) - (r+s) = α+β .
Die Aussagen 2) bis 4) lassen sich genauso nachweisen. Zu 4) ist die Beweisvariante b) rechentechnisch leichter!
Dies sei der folgenden Übung überlassen.

Vorschlag: Beweisübung
Beweisen Sie die Aussagen 2) bis 4).

M 3.3 Der Übergang „finit – infinit"

Es ist nicht möglich, die Grenze zwischen den Bereichen „finit" und „infinit" anzugeben.
Zur Begründung sei angenommen, es gäbe eine solche Grenzzahl g, so daß für alle finiten Zahlen f und alle infiniten Zahlen A gilt:
|f| ≤ |g| ≤ |A|.
Dann gibt es zwei Möglichkeiten:
1) g ist eine infinite Zahl B.
Dann wäre jedoch die Zahl |B| - 1 ebenfalls eine infinite Zahl mit |B| - 1 < |B|. Dies ist ein Widerspruch, denn es wurde g als kleinste infinite Zahl angenommen.
2) g ist eine finite Zahl.
Der Beweis hierzu erfolgt in der folgenden Übung.

Vorschlag: Beweisübung
Zeigen Sie, daß g auch keine finite Zahl sein kann.

> ***Folgerung***
> ***Zu infiniten hyperreellen Zahlen A gibt es keinen reellen Teil.***

Beweis: Eine solche reelle Zahl müßte der infiniten Zahl A infinitesimal benachbart sein. Jedoch selbst im Abstand 1 von A findet sich keine finite, also auch keine reelle Zahl.

M 3.4 Übungen

Bestimmen Sie jeweils den reellen Teil folgender Ausdrücke, falls er existiert.

a) $3\Omega + 5\omega$

b) $2\omega + 3\omega^2 + 0{,}001$

c) $\frac{7\omega^2 + 2}{3\omega^2 + 5}$

d) $\frac{3\Omega^3 - 7}{4\Omega^3 + 9 + \omega}$

e) $\frac{3 + \omega}{\omega^2}$

f) $\frac{3 + \omega}{\omega^2 + 0{,}0001}$

zu M 3.4 Lösungen

Lösungen:
(vgl. M1.7 Nr.4)

a) RT() existiert nicht

b) RT() = 0,001

c) RT() = $\frac{2}{5}$

d) RT() = $\frac{3}{4}$

e) RT() existiert nicht

f) RT() = 30000

zu M 3.4 Lösungen mit DERIVE 3.0

```
#54 RT(3/w+5*w,w)

;Simp(#54)
„+-"inf

#56 RT(2*w+3*w^2+0.001,w)

;Simp(#56)
1/1000

#58 RT((7*w^2+2)/(3*w^2+5),w)

;Simp(#58)
2/5

#60 RT((3/w^3-7)/(4/w^3+9+w),w)

;Simp(#60)
3/4

#62 RT((3+w)/w^2,w)

;Simp(#62)
inf

#64 RT((3+w)/(w^2+0.0001),w)

;Simp(#64)
30000
```

M 3.5 DERIVE-Befehle zur Bildung des reellen Teils von Termen mit hyperreellen Zahlen

```
"Funktionssymbol FFFFF, das wohl keine Konflikte bringt"

FFFFF(x):=

"Reeller Teil von FFFFF, wenn aa,ßß.∂∂ infinitesimal"

RT(FFFFF,aa,ßß,∂∂):=LIM(LIM(LIM(FFFFF,aa,0,0),ßß,0,0),∂∂,0,0)

"Reeller Teil von FFFFF, wenn aa,ßß.∂∂ positiv infinitesimal"

RTR(FFFFF,aa,ßß,∂∂):=LIM(LIM(LIM(FFFFF,aa,0,1),ßß,0,1),∂∂,0,1)

"Reeller Teil von FFFFF, wenn aa,ßß.∂∂ negativ infinitesimal"

RTL(FFFFF,aa,ßß,∂∂):=LIM(LIM(LIM(FFFFF,aa,0,-1),ßß,0,-1),∂∂,0,-1)

"Infinitesimaler Teil von FFFFF, wenn aa,ßß.∂∂ infinitesimal"

IT(FFFFF,aa,ßß,∂∂):=FFFFF-RT(FFFFF,aa,ßß,∂∂)
```

M 3.6 DERIVE-Befehle zur Erkennung von Typen hyperreeller Zahlen

```
"Hilfsfunktion für Typ"

HILF(FFFFF,aa,ßß,∂∂):=
[TPTPTP:=0,LLLLL:=ABS(RT(FFFFF,aa,ßß,∂∂)),IF(LLLLL<inf,TPTPTP:=1,TPTPTP:=0),IF(TPTPTP=1,aaaaa:=
"finit",aaaaa:="infinit"),aaaaa]

"Typ (finit oder infinit) von FFFFF,wenn aa,ßß.∂∂ infinitesimal"

Typ(FFFFF,aa,ßß,∂∂):=ELEMENT(HILF(FFFFF,aa,ßß,∂∂),5)

"Hilfsfunktion für FTyp"

FHILF(FFFFF,aa,ßß,∂∂):=[IF(RT(FFFFF,aa,ßß,∂∂)=0,aaaaa:="infinitesimal",aaaaa:=~"finit"),IF(IT(FFFFF,
aa,ßß,∂∂)=0,aaaaa:="reell",aaaaa:="finit"),aaaaa]

"FTyp (infinitesimal, reell oder finit) von finitem FFFFF, wenn aa,ßß.∂∂ infinitesimal"

FTyp(FFFFF,aa,ßß,∂∂):=ELEMENT(FHILF(FFFFF,aa,ßß,∂∂),3)
```

M 3.7 Reeller Teil hyperreeller Zahlen

1) Bestimmen Sie wie in den Beispielen jeweils den reellen Teil folgende Ausdrücke, falls er existiert.

$$RT\left(5+\frac{2}{\Omega}\right) = RT\left(5+2\omega\right) = RT(5) + RT(2\omega) = 5 + 0 = 5$$

$$RT\left(\frac{2\Omega+3}{3\Omega-1}\right) = RT\left(\frac{(2\Omega+3)\omega}{(3\Omega-1)\omega}\right) = RT\left(\frac{2+3\omega}{3-\omega}\right) = \frac{2}{3}$$

$$RT\left(\frac{6\Omega-2}{2\Omega^2-\Omega+1}\right) = RT\left(\frac{6\omega-2\omega^2}{2-\omega+\omega^2}\right) = \frac{RT(6\omega-2\omega^2)}{RT(2-\omega+\omega^2)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$RT(3\Omega+5\omega) =$$

$$RT(2\omega+3\omega^2+0{,}001) =$$

$$RT\left(\frac{7\omega^2+2}{3\omega^2+5}\right) =$$

$$RT\left(\frac{3\Omega^3-7}{4\Omega^3+9+\omega}\right) =$$

$$RT\left(\frac{3+\omega}{\omega^2}\right) =$$

$$RT\left(\frac{3+\omega}{\omega^2+0{,}0001}\right) =$$

2) Entscheiden Sie wie in den Beispielen, ob infinitesimale Zahlen, finite – nicht infinitesimale – Zahlen oder infinite Zahlen vorliegen.

Zahl	Typ	Grund
$2\Omega+1-\omega$	infinit,	denn 2Ω übersteigt die anderen Summanden
$0{,}5+3\omega$	finit,	denn 0,5 übersteigt den anderen Summanden

---

$$3\Omega+5\omega$$

$$2\omega+3\omega^2+0{,}001$$

$$\frac{7\omega^2+2}{3\omega^2+5}$$

$$\frac{3\Omega^3-7}{4\Omega^3+9+\omega} = \frac{\Omega^3\left(3-7\omega^3\right)}{\Omega^3(4+9\omega^3+\omega^4)} =$$

$$\frac{3+\omega}{\omega^2}$$

$$\frac{3+\omega}{\omega^2+0{,}0001}$$

Literatur

Henle, J.M.; Kleinberg, E.M.: Infinitesimal Calculus
The MIT Press 1979 Cambridge, Massachusetts, and London, England

Keisler, H.J.: Elementary Calculus
Prindle, Weber & Schmidt Incorporated 1976

Keisler, H.J.: Foundations of Infinitesimal Calculus
Prindle, Weber & Schmidt Incorporated 1976

Laugwitz, D.: Zahlen und Kontinuum.
Bibliographisches Institut, Zürich 1986

Laugwitz, D.: Zur Rechtfertigung der Infinitesimalmathematik.
Der Mathematikunterricht (Klett) 1983, Heft 4

Laugwitz, D.: Non Standard Analysis
Moderne Mathematik (pp. 319-350)
(Hrsg. Meschkowski) Serie Piper 1991

Landers-Rogge: Nichtstandard-Analysis
Springer-Lehrbuch 1994

Neuheuser, H.: Die Infinitesimalmathematik – Eine transparente Alternative zur heutigen Schulanalysis.
MNU (Dümmlers Verlag) 1987, Heft 2

Schnitzspan, W.: Nichtstandard-Analysis in der Schule
Der Mathematikunterricht (Klett) 1983, Heft 4

Sietmann, R.: Von Leibniz zu Robinson – Eine Alternative zur klassischen Analysis MNU
(Dümmlers Verlag) 1984, Heft 8

Simpson, A.P.: The Infidel Is Innocent
The Mathematical Intelligencer vol. 12 1990 Springer New York

Wattenberg, F.: Unterricht im Infinitesimalkalkül: Erfahrungen in den USA
Der Mathematikunterricht (Klett Verlag) 1983, Heft 4

Wunderling, H.: Esperienze didattiche con l' Analisi Non Standard
QUADERNI P.RI.ST.EM. Milano 1993, UNIVERSITÁ BOCCONI

Buchempfehlungen

Bücher, die den Einstieg in die Nichtstandardanalysis unterstützen

Nichtstandard-Analysis von D. Landers und L. Rogge

Dieses Buch ist eine Einführung in die Nichtstandard-Mathematik. In Teil I und Teil II werden die Grundbegriffe der Nichtstandardmathematik entwickelt, Teil III gibt einen Überblick über die reelle Nichtstandard-Analysis, Teil IV und Teil V geben einen Überblick über die Nichtstandard-Topologie bzw. Nichtstandard-Stochastik, während Teil VI die Beziehung zwischen der Nichtstandard-Mathematik dieses Lehrbuches und dem Ansatz, der von E. Nelson entwickelt wurde, herstellt.

Natürlich sind für die Lehrerin bzw. den Lehrer nur die Teile I, II sowie diejenigen Abschnitte aus Teil III, die im Zusammenhang mit den Unterrichtsinhalten der gymnasialen Oberstufe stehen, wesentlich. In Teil I wird ein elementarer Zugang zur Nichtstandard-Analysis gegeben, es wird nach einem grundlegenden Abschnitt über Filter und Ultrafilter der Erweiterungskörper der hyperreellen Zahlen konstruiert, eine einfache Nichtstandard-Analysis reellwertiger Funktionen wird durchgeführt. Dabei werden bereits Nichtstandard-Kriterien für stetige bzw. differenzierbare Funktionen gegeben, und es wird eine erste Formulierung des Transfer-Prinzips geboten, so daß hier bereits die Umrisse der Schulanalysis (abgesehen von der Integration) sichtbar werden.

In Teil II werden dann die Grundbegriffe der Nichtstandard-Analysis entwickelt, dies entspricht etwa einer in die Nichtstandard-Analysis einführenden Universitätsvorlesung für Studentinnen und Studenten, die bereits Grundkenntnisse in linearer Algebra und in (herkömmlicher) Analysis haben. Es werden der Begriff der Superstruktur, Formeln und Aussagen in Superstrukturen und das Transferprinzip behandelt. Am Ende dieses Teils ist dann das „Handwerkszeug" der Nichtstandard-Analysis im wesentlichen komplett.

In Teil III wird dann die Nichtstandard-Analysis von Folgen, Reihen und Funktionen entwickelt, es werden die Begriffe Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit von Folgen, Reihen bzw. Funktionen behandelt. Mehrere Abschnitte dieses Teils führen bereits weit über die Inhalte der Schulmathematik hinaus. Auch wenn beträchtliche Teile des Buches weit über schulische Lerninhalte hinausführen, soll es dennoch interessierten Lesern empfohlen werden, da es in einer sehr transparenten Weise geschrieben ist. Es gibt eine leicht verständliche Einführung in die Nichtstandard-Analysis und ist zum Selbststudium geeignet. Dabei wird das Gebiet der Nichtstandard-Analysis mit sehr großer Exaktheit systematisch erschlossen. Die Darstellung ist übersichtlich und intuitiv, die Beweise sind durchsichtig und sehr ausführlich. Es eignet sich also für einen schnellen und systematischen Einstieg in die Nichtstandard-Analysis.

Zahlen und Kontinuum von D. Laugwitz

Diese Buch ist ebenfalls eine Einführung in die Nichtstandard-Analysis, wobei historische und philosophische Bezüge hergestellt werden.

In Kapitel 1 – Propädeutik – wird mit dem Material der Analysis experimentiert, um daraus die Anforderungen an die Grundlagen herleiten zu können. Kapitel 2 behandelt Zahlbereichserweiterungen und zielt darauf, durch Adjunktion einer einzigen unendlich großen natürlichen Zahl – der Zahl Omega - einen Ring bzw. einen Körper zu erhalten, der unendlich kleine und unendlich große Zahlen enthält. In den Kapiteln 3 bis 5 werden dann Themen der Analysis mit Nichtstandard-Methoden behandelt. Kapitel 6 stellt historische und philosophische Bezüge her, während in Kapitel 7 darüber nachgedacht wird, ob Methoden der Nichtstandard-Analysis Eingang in den Mathematik-Unterricht finden können.

Dieses Buch stellt weniger einen systematischen Zugang zur Nichtstandard-Analysis her, vielmehr wird in einer „spielerischen Form" hergeleitet, welche Anforderungen an die theoretischen Grundlagen erfüllt sein müssen. Empfehlenswert ist das Buch auch deswegen, da vom Leser keine tiefliegenden Vorkenntnisse erwartet werden (der Verfasser spricht lediglich von Abiturkenntnissen), so daß große Teile sehr leicht lesbar sind. Lesenswert ist das Buch auch wegen seiner philosophischen und historischen Bezüge und wegen seiner Bemerkungen über didaktische Fragen.

Mathematik betrifft uns

Preisinformation
Abonnement:
DM 87,– plus Porto pro Jahr

Einzelheft mit Abonnement:
DM 14,50 plus Porto

Einzelheft ohne Abonnement:
DM 19,50 plus Porto

Themen der nächsten Ausgaben

1995	3	Komplexe Zahlen

Lieferbare Einheiten (Auswahl)

1991	1	**Stochastik:** Von der Binominal- zur Normalverteilung
	2	**Analysis:** Parametrisierte Kurven im R^2
	3	**Lineare Algebra/Analytische Geometrie:** Lineare Optimierung im R^3
	4	**Lineare Algebra/Analytische Geometrie:** Der Gauss'sche Algorithmus
	5	**Stochastik:** Projekte zur Einführung in die beurteilende Statistik – Testen
	6	**Analysis:** Taylorreihenentwicklung mit Derive
1992	1	**Stufe 10:** Sinus, Kosinus – anders
	2	**Stochastik:** Ein direkter Weg zur Binominalverteilung
	3	**Analysis:** Über Extremwertprobleme zum Ableitungsbegriff
	4	**Analysis:** Differentialrechnung – computerunterstützte Einführung
	5	**Stochastik:** Projekte zur Einführung in die beurteilende Statistik – Schätzen
	6	**Analysis:** Differentialgleichungen
1993	1	**Stochastik:** Statistische Verteilungen
	2	**Stufe 10:** π
	3	**Analysis:** Bilder und Filme mit Derive
	4	**Analysis:** Nullstellenbestimmung mit dem Newton-Verfahren
	5	**Lineare Algebra:** Matrizen mit Derive
	6	**Analysis:** Induktion – Rekursion – Iteration
1994	1	**Stufe 8:** Lineare Optimierung
	2	**Analysis:** Differentialgleichungen 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
	3	**Stochastik mit Derive**
	4	**Stochastik:** Markow-Ketten 1/Taschenrechner im Unterrichtseinsatz
	5	**Stochastik:** Markow-Ketten 2/Das Notenprogramm ProPhil
	6	**Näherungsverfahren**
1995	1	**Sanfter Mathematikunterricht**

© Bergmoser + Höller Verlag GmbH, Karl-Friedrich-Str. 76, 52072 Aachen
Tel.: 02 41/9 38 88-25, Fax: 02 41/9 38 88-34, ISSN 0938-0876