Differentialrechnung mit hyperreellen Zahlen

Teil 2

Peter Baumann, Bernhard Steinig und Helmut Wunderling

8 Einblick in die Grundlagen hyperreeller Zahlen

Wie von den Übergängen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$, von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ und von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ bekannt, durchlaufen Zahlbereichserweiterungen folgende Schritte:

(0) Bereitstellung des Ausgangsmaterials.

(1) Herstellung komplexerer Zusammenstellungen aus dem Ausgangsmaterial (Paare oder Folgen).

(2) Festsetzung einer Äquivalenzbeziehung zwischen diesen Zusammenstellungen.

(3) Festlegung und Überprüfung der Rechenarten

(4) Einbettung des Ausgangsmaterials durch Identifikation.

Für den Übergang von $\mathbb{R}$ zum Körper $\mathbb{H}$ der hyperreellen Zahlen bedeutet das folgendes Vorgehen:

zu (0): Wir gehen vom angeordneten, vollständigen Körper der reellen Zahlen aus.

zu (1): Wir bilden sämtliche reelle Zahlenfolgen, betrachten also die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

zu (2): Zwei Folgen heißen äquivalent genau dann, wenn sie in „genügend vielen“ Gliedern bzw. „genügend oft“ übereinstimmen. Hyperreelle Zahlen sind die durch diese Relation erzeugten Äquivalenzklassen.

(Diskussion und Definition dieser Relation im Anschluß an „zu (4)“!)

zu (3): Definition: Für je zwei hyperreelle Zahlen a und b, die durch die Folgen (a_n) und (b_n) dargestellt seien, wird festgelegt:

(a) $a + b$ wird dargestellt durch: (a_n+b_n)

(b) $a - b$ wird dargestellt durch: $(a_n - b_n)$

(c) $a \cdot b$ wird dargestellt durch: $(a_n \cdot b_n)$

(d) a / b wird dargestellt durch: (a_n/b_n), falls $b \neq 0$

(e) $a < b$ genau dann, wenn genügend oft $a_n < b_n$

(f) $a = {}^*\!f(b)$ genau dann, wenn genügend oft $a_n = f(b_n)$
(hyperreelle Funktion ${}^*\!f$ als Erweiterung einer reellen Funktion f)

Während die Rechen- und Relationszeichen links neu definiert sind und daher genau genommen auch neu erfunden werden müßten (z. B. *+, *–, ... , *=), sind die entsprechenden Zeichen rechts die altbekannten für reelle Zahlen.

Die Definition liefert unabhängig von der Wahl der darstellenden Folgen eindeutige Ergebnisse.

Voraussetzung: Sei (A_n) gleichwertig zu (a_n), d.h. genügend oft gilt $A_n = a_n$.
Sei (B_n) gleichwertig zu (b_n), d.h. genügend oft gilt $B_n = b_n$.

Beweis: (Beispiel Addition)

$(A_n + B_n)$ stimmt mit $(a_n + b_n)$ mindestens für alle diejenigen Indizes überein, für die beide Voraussetzungen zutreffen. Auch das ist genügend oft. $(A_n + B_n)$ und $(a_n + b_n)$ beschreiben also ein und dieselbe Zahl, die $a + b$ genannt wird.

Bemerkung 1: Die Relation „genügend oft" muß die soeben benutzte Eigenschaft aufweisen!

Bemerkung 2: Bei der Division $a \,/\, b$ kann $b_n = 0$ trotz $b \neq 0$, auftreten – allerdings nur für höchstens ungenügend viele Indizes n; in diesen Fällen wird natürlich $a_n \,/\, b_n$ nicht gerechnet. Statt dessen werden diese Lücken in der Folge der Quotienten durch beliebig wählbare Zahlen ausgefüllt. (Vgl. auch Umgang mit der Wurzelfunktion in Kapitel 5.)

zu (4): Zu jeder reellen Zahl r (bzw. s) gibt es diejenige hyperreelle Zahl $^*r$ (bzw. $^*s$), die durch die konstante Folge (r_n) mit $r_n = r$ (bzw. (s_n) mit $s_n = s$) dargestellt werden kann.

Es ist klar, daß sich dann z.B. ergibt: $^*(r + s) = {}^*r + {}^*s$, daß sich also das Rechnen mit den speziellen hyperreellen Zahlen $^*r$, $^*s$, ... nicht vom Rechnen mit den reellen Zahlen r, s, ... unterscheidet. Daher wird zwischen beiden Zahltypen kein Unterschied mehr gemacht.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist also echte Teilmenge der Menge $\mathbb{H}$ der hyperreellen Zahlen.

Oder umgekehrt: $\mathbb{H}$ ist eine echte Erweiterung von $\mathbb{R}$.

Die Relation „genügend viel" bzw. „genügend oft".

Folgende Sprechweisen meinen immer dieselbe Relation zwischen reellen Zahlenfolgen:

(a_n) und (b_n) stimmen in *genügend vielen* Gliedern überein.

(a_n) und (b_n) stimmen *genügend oft* überein.

Die Menge der Indizes n, für die $(a_n) = (b_n)$ gilt, ist *genügend groß*.

Für die Definition der Relation eignet sich die dritte Sprechweise am besten, für den sprachlichen Umgang die zweite.

Um Differential- und Integralrechnung zu ermöglichen, müssen infinitesimale Zahlen vorhanden sein. Für die durch $\left(\frac{}{n}\right)$ dargestellte Zahl ω muß also für jede positive reelle Zahl r gelten: $\omega < r$. Das ist nur dann möglich, wenn alle Mengen von Indizes $\{i \mid \frac{}{i} < r\}$ als genügend groß gelten. Folgen, die sich von einem gewissen Index an nicht mehr unterscheiden, müssen also als äquivalent gelten (kofinite Folgen bei Laugwitz [8]).

Es soll $\mathbb{H}$ ein Körper werden; Nullteiler müssen also vermieden werden. Die Folgen zu den hyperreellen Zahlen $((-1)^\Omega - 1)$ und $((-1)^\Omega + 1)$, deren Produkt jedenfalls Null sein muß, sind aber:

$(-1)^\Omega - 1$:	–2;	0;	–2;	0;	...
$(-1)^\Omega + 1$:	0;	2;	0;	2;	...
Index:	1;	2;	3;	4;	...

Eine von ihnen muß also die Zahl 0 darstellen, sonst wären Nullteiler vorhanden; die Situation ist ungewohnt offen! Wir legen daher fest:

Die Menge aller ungeradzahligen Indizes sei *genügend groß*; dann muß selbstverständlich die Menge aller geradzahligen Indizes ungenügend groß sein. (Es könnte auch umgekehrt entschieden werden.)

Deswegen zählen nur noch die Folgenglieder mit ungeradem Index, und es ist damit $(-1)^\Omega + 1 = 0$ und $(-1)^\Omega - 1 = -2$; d. h. Ω ist als eine ungerade infinite hypernatürliche Zahl definiert.

Die angesprochenen Beispiele zeigen, daß für jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ die Kenntnis benötigt wird, ob sie genügend groß ist oder nicht. Dazu wird jeder Teilmenge T von $\mathbb{N}$ eine Größeninformation $G(T)$ zugeordnet und zwar so, daß folgende Bedeutung verabredet sei:

$G(T) = 1$ heißt: T ist genügend groß;

$G(T) = 0$ heißt: T ist ungenügend groß.

Es ist selbstverständlich, daß die Funktion G nicht derart beliebig sein kann, daß sie vollkommen wahllos Nullen und Einsen auf die Teilmengen von $\mathbb{N}$ verteilt. Vielmehr wird die Wirkungsweise von G durch folgenden Grundsatz geregelt:

Grundsatz:

Es gibt Funktionen G, die jeder Teilmenge T von $\mathbb{N}$ entweder 0 oder 1 zuordnen und folgende Eigenschaften besitzen:

(a) $G(\mathbb{N}) = 1$ d.h. $\mathbb{N}$ ist genügend groß

(b) wenn T endlich, dann $G(T) = 0$ d. h. endliche Teilmengen sind ungenügend groß

(c) wenn $T \cap S$ leer, dann $G(T \cup S) = G(T) + G(S)$.

Dieser Satz kann mit Hilfe des Auswahlaxioms bewiesen werden (vgl. z. B. *Lindstrøm* [12]); er kann aber auch eigenständig als Axiom dienen.

Die Beachtung dieser wenigen Regeln garantiert die wichtigen Eigenschaften genügend großer Indexmengen:

Satz 1: Wenn eine Teilmenge T von $\mathbb{N}$ genügend groß ist, dann ist ihre Komplementärmenge $\mathbb{N} \backslash T$ ungenügend groß.

Beweis: $T \cup (\mathbb{N} \backslash T) = \mathbb{N}$ und $T \cap (\mathbb{N} \backslash T)$ leer (Definition von Komplementärmenge), also gilt

$G(T \cup (\mathbb{N} \backslash T)) = 1$ (Grundsatz (a)) und

$G(T \cup (\mathbb{N} \backslash T)) = G(T) + G(\mathbb{N} \backslash T)$ (Grundsatz (c)).

Also $1 = 1 + G(\mathbb{N} \backslash T)$ und somit $G(\mathbb{N} \backslash T) = 0$.

Satz 2: Wenn eine Teilmenge T von $\mathbb{N}$ ungenügend groß ist, dann ist ihre Komplementärmenge $\mathbb{N} \backslash T$ genügend groß.

Beweis: $T \cup (\mathbb{N} \backslash T) = \mathbb{N}$ und $T \cap (\mathbb{N} \backslash T)$ leer (Definition von Komplementärmenge), also gilt

$G(T \cup (\mathbb{N} \backslash T)) = 1$ (Grundsatz (a)) und

$G(T \cup (\mathbb{N} \backslash T)) = G(T) + G(\mathbb{N} \backslash T)$ (Grundsatz (c)).

Also $1 = 0 + G(\mathbb{N} \backslash T)$ und somit $G(\mathbb{N} \backslash T) = 1$.

Satz 3: Wenn T genügend groß und $T \subseteq S$, dann ist auch S genügend groß.

Beweis: Angenommen S ungenügend groß, also $G(S) = 0$, dann wäre $0 = G(S) = G(T \cup (S \backslash T)) = G(T) + G(S \backslash T) = 1 + G(S \backslash T) \geq 1$, Widerspruch.

Satz 4: Wenn zwei Teilmengen T und S von $\mathbb{N}$ genügend groß sind, dann ist ihr Durchschnitt D, $D = T \cap S$, auch genügend groß.

Beweis: Sei $T_0 := T \backslash S$ und $V_0 := \mathbb{N} \backslash (S \cup T)$, dann ist $T_0 \cap V_0$ leer und $T_0 \cup V_0 = \mathbb{N} \backslash S$.

$G(\mathbb{N} \backslash S) = 0$ (Satz 1), somit $G(T_0) + G(V_0) = 0$ und also auch $G(T_0) = 0$.

Ferner ist $T_0 \cap \mathbb{N} \backslash T$ leer und $T_0 \cup (\mathbb{N} \backslash T) = \mathbb{N} \backslash D$,

also $G(\mathbb{N} \backslash D) = G(T_0 \cup (\mathbb{N} \backslash T)) = G(T_0) + G(\mathbb{N} \backslash T) = 0 + 0 = 0$.

Nach Satz 2 ist deshalb $G(D) = 1$.

Die Sätze 3 und 4 garantieren eine Äquivalenzrelation und sind die Grundlage für die Unabhängigkeit der Rechenoperationen hyperreeller Zahlen von der Wahl der repräsentierenden Folgen, die oben unter „zu (3)“ bereits benutzt wurden. Die Relation selber werde durch das Zeichen „Æ“ symbolisiert. Es ergibt sich also die folgende

Definition: Für reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) wird festgelegt:

$$(a_n) \text{ Æ } (b_n) \quad \Leftrightarrow \quad G(\{n | a_n = b_n\}) = 1.$$

Satz 5: Die Relation Æ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

(a) Reflexivität: Jede Folge stimmt mit sich selbst genügend oft überein.

(b) Symmetrie: (a_n) Æ (b_n) $\Rightarrow$ $G(\{n | a_n = b_n\}) = 1$ $\Rightarrow$ $G(\{n | b_n = a_n\}) = 1$ $\Rightarrow$ (b_n) Æ (a_n)

(c) Transitivität: (a_n) Æ (b_n) und (b_n) Æ (c_n) $\Rightarrow G(\{n | a_n = b_n\}) = 1$ und $G(\{n | b_n = c_n\}) = 1$

$\{n | a_n = c_n\} = \{n | a_n = b_n\} \cap \{n | b_n = c_n\}$; nach Satz 4: $G(\{n | a_n = c_n\}) = 1$.

Insgesamt: (a_n) Æ (b_n) und (b_n) Æ $(c_n) \Rightarrow (a_n)$ Æ (c_n).

Zum Übertragungsprinzip

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wurde ausgeführt, wie der Körper der hyperreellen Zahlen in strenger Form definiert werden kann. Dabei wurde darauf geachtet, daß sich alle Rechenregeln von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{H}$ übertragen und sich folgendes Prinzip formulieren läßt:

In $\mathbb{R}$ und $\mathbb{H}$ gelten dieselben Aussagen, sofern sie sich als Regeln nur über reelle Zahlen und nur über hyperreelle Zahlen formulieren lassen.

In dieser Form wird das Übertragungsprinzip für die Schule hauptsächlich benötigt.

Es soll nun an einem Beispiel untersucht werden, wie bei Aussagen über hyperreelle Zahlen, aber darüber hinaus auch bei Aussagen über Mengen von hyperreellen Zahlen eine Entscheidung getroffen werden kann, ob sie wahr oder falsch sind.

Wir betrachten die Aussage, daß $10000 < \Omega$ gilt. (Ω sei wieder die hypernatürliche Zahl, die durch die Folge $(1;2;3;\ldots)$ beschrieben wird.)

Wird 10000 als hyperreelle Zahl dargestellt, so ergibt sich

$(10^4; 10^4; 10^4;\ldots) < (1;2;3;\ldots)$.

Die Richtigkeit dieser Aussage wird durch den Vergleich der einzelnen Glieder der beiden Zahlenfolgen erkannt.

$$\left.\begin{array}{l} 10^4 < 1 \\ 10^4 < 2 \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ 10^4 < 10^4 \end{array}\right\} \text{Aussage falsch}$$

ab $10^4 < 10^4 + 1$ ist die Aussage stets wahr; sie ist also genügend oft wahr, oder formal: mit $T := \{n | \ 10^4 < n\}$ gilt $G(T) = 1$, denn $\mathbb{N} \backslash T$ ist eine endliche Menge.

Es gibt jedoch einen zweiten - mengentheoretischen - Weg. Dazu soll vorbereitend die Kleiner-Relation K als Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert werden: $K := \{(a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Es ist klar, daß $\sqrt{2} < 3$ gleichbedeutend mit der Aussage $(\sqrt{2}\,; 3) \in K$ ist.

Wie kann dies auf den Bereich $\mathbb{H}$ übertragen werden? Wir definieren dazu die Menge $^*K$ als dasjenige System, das durch die konstante Mengenfolge $(K; K; K;\ldots)$ beschrieben wird. (Die einzelnen Glieder dieser Folge dürfen zu anderen Mengen verändert werden; sofern immer noch bei genügend vielen Indizes die Menge K erhalten bleibt, soll diese neue Folge ebenfalls die Menge $^*K$ beschreiben - entsprechend den Ausführungen über Zahlen im ersten Teil dieses Kapitels.)

Für zwei hyperreelle Zahlen a, b (beschrieben durch die Folgen (a_n), (b_n)) gilt einerseits

$a < b \Leftrightarrow a_n < b_n$ für genügend viele Indizes n, $n \in \mathbb{N}$(*),

ferner soll gelten

$a < b \Leftrightarrow (a; b) \in {}^*K$.

Da die Aussage (*) richtig ist, können wir auch

$(a; b) \in {}^*K \Leftrightarrow (a_n; b_n) \in K$ für genügend viele $n, n \in \mathbb{N}$,

schreiben, und dies führt dazu, die Elementbeziehung im Hyperreellen folgendermaßen zu definieren:

Es sei $x \in \mathbb{H}$ eine hyperreelle Zahl, beschrieben durch die Folge (x_n), und A eine Teilmenge von $\mathbb{H}$, beschrieben durch die Mengenfolge (A_n). Es gelte $x \in A$ genau dann, wenn $x_n \in A_n$ für genügend viele n, $n \in \mathbb{N}$, gilt.

Oder für kartesische Produkte:

Es sei $(x, y) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ ein hyperreelles Zahlenpaar, beschrieben durch die Folge $((x_n; y_n))$, und A sei eine Teilmenge von $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, beschrieben durch die Mengenfolge $(A_n \times B_n)$. Es gelte $(x, y) \in A$ genau dann, wenn $(x_n; y_n) \in A_n \times B_n$ für genügend viele n, $n \in \mathbb{N}$, gilt.

Mit dieser Definition ist erreicht, daß wir für zwei hyperreelle Zahlen a, b $\in \mathbb{H}$ sagen können

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad (a; b) \in {}^*K,$$

$$\text{z. B. } 10^4 < \Omega \quad \Leftrightarrow \quad (10^4; \Omega) \in {}^*K.$$

Die hier am Beispiel der Kleiner-Relation gezeigte Methode, sie mittels Mengenbildung und Elementbeziehung derart zu beschreiben, daß sich Aussagen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{H}$ übertragen, führt zu dem wichtigen Begriff der internen Menge. Für den Analysisunterricht in der Schule ist folgende Definition weit genug:

Definition:

1. Für Mengenfolgen zugelassen werden nur beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sowie alle Teilmengen endlicher kartesischer Produkte $\mathbb{R}^n$.

2. Eine hyperreelle Menge heißt *intern* genau dann, wenn sie durch eine Folge von zugelassenen reellen Mengen beschrieben werden kann.

Mit dieser Festlegung ist erreicht, daß bereits ein großer Teil der Relationen der Analysis mengentheoretisch ausgedrückt werden kann, wie zum Beispiel alle Relationen, die sich auf Zahlen beziehen oder alle Funktionen mit einer oder mit mehreren Variablen.

Es sei darauf hingewiesen, daß der Bereich der zulässigen Mengen nach Bedarf erweitert werden kann. In der Hochschulmathematik wird er bis zur sogenannten Superstruktur von $\mathbb{R}$ erweitert.

Die Beschränkung auf interne Mengen hat den Vorteil, daß Aussagen, die über sie getroffen werden, dadurch bewiesen (oder widerlegt) werden können, daß sie in Aussagen über die entsprechenden Mengen in $\mathbb{R}$ übersetzt werden; man muß jeweils nur die zugrundeliegende Folge von Aussagen betrachten.

Dazu ein *Beispiel*:

Der Satz: „Jede interne nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{H}$ besitzt ein Supremum." ist wahr. Der Folgenmechanismus vererbt ihn über genügend viele Sätze über reelle Mengen mit dieser Eigenschaft.

Der Satz: „Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{H}$ besitzt ein Supremum." ist hingegen falsch (der Zusatz „intern" fehlt!). Denn die Menge $E := \{a \in \mathbb{H} |\ a \in \mathbb{N}\}$ hat in $\mathbb{H}$ kein Supremum (wie bereits ausgeführt), obwohl diese Menge durch jede positiv infinite Zahl beschränkt ist. Diese Menge ist allerdings auch keine interne Menge, da sie durch keine Mengenfolge beschrieben werden kann. (Würde es eine solche Mengenfolge geben, so könnten genügend viele Glieder dieser Folge nur endlich viele Elemente enthalten. Diese Folgenglieder müßten sogar alle dieselbe endliche Auswahl von Elementen aus $\mathbb{N}$ beinhalten, woraus folgen würde, daß $\mathbb{N}$ eine endliche Menge wäre.) Solche „externen" Mengen wie E werden durch den Begriff der internen Mengen ausgeschlossen.

Ehe genau auf das Übertragungsprinzip eingegangen wird, sollen noch einmal in einer Tabelle die beiden Bereiche gegenübergestellt werden.

reeller Bereich	hyperreeller Bereich
$\mathbb{R}$	$\mathbb{H} = (\mathbb{R}; \mathbb{R}; \mathbb{R}; ...)$
$\mathbb{N}$	$^*\mathbb{N} = (\mathbb{N}; \mathbb{N}; \mathbb{N}; ...)$
K	$^*K = (K; K; K; ...)$
3	$^*3 = (3; 3; 3; ...)$
-	$\Omega = (1; 2; 3; ...)$
-	$T = (T_0; T_1; T_2; T_3; ...)$

Die hypernatürliche Zahl Ω hat im Reellen kein Gegenstück. Ebensowenig die Menge T, die durch die Mengenfolge: $T_0 = \{0\}$, $T_1 = \{0; 1\}$, $T_2 = \{0; 1; 2\}$, ... , $T_n = \{0; 1; 2; 3; ...; n\}$, ... definiert sei. Jedes T_n ist eine zulässige Menge und damit ist T eine interne Menge im Bereich $\mathbb{H}$.

Da jedes Folgenglied eine endliche (finite) Menge ist, erbt T als „hyperfinite" Menge wichtige Eigenschaften, obwohl selbst unendlich.

Z. B.: **In jeder hyperfiniten Zahlenmenge gibt es ein größtes und auch ein kleinstes Element.**

Hyperfinite Mengen werden zur Unterteilung hyperreeller Intervalle äußerst vorteilhaft eingesetzt.

Beispiel:

Satz: Sei f eine über (einem reellen Intervall) $[a, b]$ definierte stetige (reelle) Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.

Dann gibt es eine (reelle) Nullstelle z in $[a, b]$ mit $f(z) = 0$.

*Beweis*skizze:

Wir unterteilen das Intervall in unendlich viele gleich lange Teilstücke.

Sei N eine infinite hypernatürliche Zahl und $dx := \frac{b-a}{N}$. Dann ist dx infinitesimal und die Teilstücke werden durch die Zahlen $x_i := a + i \cdot dx$ begrenzt, $i = 0, 1, ..., N$.

Die Menge aller dieser Stellen x_i mit $f(x_i) \le 0$ ist hyperfinit. Es gibt also einen maximalen Index m mit $f(x_m) = f(a + m \cdot dx) \le 0$.

Für die nächste Stelle x_{m+1} ist der Funktionswert demnach sicher positiv. Beide Stellen sind infinitesimal benachbart, haben also denselben reellen Teil z, $z := RT(x_m) = RT(x_{m+1})$.

Wegen der Stetigkeit und weil f eine reelle Funktion ist, gilt $f(z) = 0$.

Es soll nun das Übertragungsprinzip formuliert werden.

Übertragungsprinzip:

Eine Aussage, die sich auf Zahlen oder interne Mengen in $\mathbb{H}$ bezieht, ist genau dann wahr, wenn die Folge der entsprechenden Aussagen (bezogen auf Zahlen oder zulässige Mengen in $\mathbb{R}$) genügend oft wahr ist.

Dazu drei Bemerkungen:

(1) Dieses Übertragungsprinzip läßt sich durch vollständige Induktion beweisen. Es muß dazu die Analysis durch Zeichenreihen mit logischen Symbolen (Zeichen für logisch 'und', 'oder', 'äquivalent zu', Quantoren etc.) formalisiert sein. Man startet dann mit den „Primformeln" $a = b$ bzw. $x \in Y$ und setzt sukzessive alle anderen Formeln daraus zusammen.

(2) Bei einer Aussage, die sich zum Beispiel nur auf das Rechnen mit hyperreellen Zahlen bezieht (etwa $a + b = c$ in $\mathbb{H}$), entspricht das Übertragungsprinzip dem Rechnen mit hyperreellen Zahlen, wie bereits vorher schon ausgeführt.

(3) Das Übertragungsprinzip ist die moderne Form des Kontinuitätsprinzips von *Leibniz*:

„Die Regeln des Endlichen behalten im Unendlichen Geltung, ... und umgekehrt gelten die Regeln des Unendlichen für das Endliche ..."

Literatur

[1] *Davis, M.*: Applied Nonstandard Analysis. John Wiley & Sons, 1977.

[2] *Diener, F., Reeb, G.*: Analyse Non Standard. Hermann, 1989.

[3] *Euler, L.*: Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Springer, Reprint 1983.

[4] *Henle, J.M., Kleinberg, E. M.*: Infinitesimal Calculus. MIT Press, 1979.

[5] *Keisler, H.J.*: Elementary Calculus. Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[6] *Keisler, H.J.*: Foundations of Infinitesimal Calculus. Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[7] *Lakatos, I.*: Cauchy and the continuum: ... Cambridge University Press, 1978.

[8] *Laugwitz, D.*: Zahlen und Kontinuum. B. I., 1986.

[9] *Laugwitz, D.*: Zur Rechtfertigung der Infinitesimalmathematik. **MU 29** (1983) H. 4.

[10] *Laugwitz, D.*: Non Standard Analysis. In: Moderne Mathematik (pp. 319-350) (Hrsg. *Meschkowski*) Serie Piper, 1991.

[11] *Landers - Rogge*: Nichtstandard Analysis. Springer, 1994.

[12] *Lindstrøm, T.*: Nonstandard Analysis. In: nonstandard stochastic methods. 1988.

[13] *Luxemburg, W. A. J.*: What is Nonstandard Analysis ? Amer. Math. Monthly **80** (1973) 6, part II.

[14] *Neuheuser, H.*: Die Infinitesimalmathematik - Eine transparente Alternative zur heutigen Schulanalysis. **MNU 40** (1987) Heft 2.

[15] *Robert, A.*: Nonstandard-Analysis. John Wiley &Sons, 1988.

[16] *Schnitzspan, W.*: Nichtstandard-Analysis in der Schule. **MU 29** (1983) H. 4.

[17] *Sietmann, R.*: Von *Leibniz* zu *Robinson* - Eine Alternative zur klassischen Analysis. **MNU 37** (1984) H. 8.

[18] *Simpson, A. P.*: The Infidel Is Innocent. The Mathematical Intelligencer **12** (1990).

[19] *Spalt, D. D.*: Vom Mythos der mathematischen Vernunft. Wiss. Buchgesellschaft, 1981.

[20] *Steinig, B.*: Grundlagen der *Fourier*-Analysis im Rahmen der Nichtstandard-Analysis. Staatsexamensarbeit Berlin, 1984.

[21] *Wattenberg, F.*: Unterricht im Infinitesimalkalkül: Erfahrungen in den USA. **MU 29** (1983) H. 4.

[22] *Wunderling, H.*: Esperienze didattiche con l'Analisi Non Standard. QUADERNI P.RI.ST.EM. Universita Bocconi, Milano 1993.

Kontaktanschrift der Verfasser:

StD Helmut Wunderling, Dahlemer Weg 84, 14167 Berlin