Differentialrechnung mit hyperreellen Zahlen

Teil 1

Peter Baumann, Bernhard Steinig und Helmut Wunderling

Die wesentliche Grundlage des herkömmlichen Analysisunterrichts ab der 11. Jahrgangsstufe ist der Grenzwertbegriff. Er ist aber – zumindest für sehr viele Schüler – auch das Hauptproblem. Viel Unterrichtszeit wird zu seiner Einführung und Verankerung in den Köpfen verwendet, um ihn schließlich bei der Anwendung der vergleichsweise einfachen Ableitungs- und Integrationsregeln eigentlich gar nicht mehr zu benötigen. Hier bietet das Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen eine weittragende Alternative. Diese Teilmengen der sog. hyperreellen Zahlen $\mathbb{H}$, einer Erweiterung des reellen Zahlenkörpers $\mathbb{R}$ aus unserem Jahrhundert, geht schon auf die 'Väter der Inifinitesimalrechnung' zurück, war aber in der Mathematik lange Zeit nicht Gegenstand der Forschung. Dagegen arbeiteten beispielsweise Physiker schon immer mit den entsprechenden Vorstellungen.

Der vorliegende Beitrag führt nach einem historischen Rückblick die hyperreellen Zahlen über Folgen ein, zeigt Möglichkeiten ihrer Veranschaulichung und betreibt dann beispielhaft eine der 11. und 12. Jahrgangsstufe gemäße Differentialrechnung. Dabei werden auch die wesentlichen Erleichterungen gegenüber der bisherigen (Grenzwert-) Analysis, z. T. durch direkte Gegenüberstellung, deutlich. Den Abschluß bildet ein Einblick in die mathematischen Grundlagen hyperreeller Zahlen einschließlich des Übertragungsprinzips von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{H}$ und umgekehrt.

1 Einleitung

In der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts wurden die Techniken der Infinitesimalrechnung von *Gottfried Wilhelm Leibniz* erfunden. *Leonhard Euler* hat sie dann weiterentwickelt und vielfältig angewandt. Die Mathematiker dieser Epoche verfügten allerdings noch nicht über Regeln, die entsprechend unseren heutigen Anforderungen streng bewiesen waren. Über unendlich kleine Zahlen hatten sie nur intuitive Vorstellungen. In Bezug auf das Rechnen mit ihnen berief sich Leibniz zum Beispiel auf sein Kontinuitätsgesetz (*'Leibniz-Prinzip'*): „Die Regeln des Endlichen behalten im Unendlichen Geltung, ... und umgekehrt gelten die Regeln des Unendlichen für das Endliche ...", wie er in einem Brief an *Varignon* am 2. Februar 1702 schrieb.

Augustin-Louis Cauchy gilt bis heute allgemein als derjenige, der im 19. Jahrhundert die Strenge in die mathematische Analysis einführte und sie vom Rechnen mit unendlich kleinen Zahlen befreite. Die dabei von ihm weiterhin benutzten Infinitesimalzahlen, so das allgemeine Verständnis, stellten lediglich eine besondere Sprechweise dar. *Imre Lakatos* weist jedoch in einem wissenschaftstheoretischen Aufsatz [7] nach, daß dies eine falsche historische Betrachtungsweise ist. *Cauchy* bewies – so *Imre Lakatos* – in seinem Werk „Cours d'Analyse", das im Jahre 1821 erschien, daß die Grenzfunktion einer konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist, obwohl bereits zu jenem Zeitpunkt Gegenbeispiele zu dieser Aussage (konvergente Reihen stetiger Funktionen, deren Grenzfunktionen gewisse Unstetigkeitsstellen besitzen) von *J. B. J. Fourier* angegeben worden waren. Nach der heute üblichen Auffassung übersah *Cauchy* den Unterschied zwischen (punktweiser) Konvergenz und gleichmäßiger Konvergenz. *Philipp Ludwig Seidel* arbeitete diese wesentliche Voraussetzung im Jahr 1847 heraus und stellte so *Cauchy*s Satz richtig. *Lakatos* führt jedoch aus, daß *Cauchy*s Satz im Rahmen des Infinitesimalkalküls richtig war, wobei *Fourier*s Gegenbeispiele an den Unstetigkeitsstellen keine konvergenten Reihen von Funktionen im Sinne *Cauchy*s darstellten. Der Fehler in *Cauchy*s Satz entstand erst durch eine falsche Übersetzung der Infinitesimalmathematik, der sich *Cauchy* tatsächlich bediente, in die Sprache der Analysis von *Weierstraß*. Derartige Probleme ließen die Infinitesimalmathematik im Vergleich zu der Analysis von *Weierstraß* als weniger streng erscheinen und bewirkten, daß das Rechnen mit unendlich kleinen Zahlen über hundert Jahre in Vergessenheit geriet.

Im Jahre 1961 entdeckte *Abraham Robinson*, daß unendlich kleine und unendlich große Zahlen nach unserem heutigen Verständnis exakt eingeführt werden können. *Robinson* zeigte, daß die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in einen Erweiterungskörper $\mathbb{H}$, den Körper der hyperreellen Zahlen, eingebettet werden kann. (Ursprünglich wurde der Körper $\mathbb{H}$ mit $^*\mathbb{R}$ bezeichnet.) Auf den ersten Blick erscheint die Existenz dieses hyperreellen Zahlenkörpers paradox, da ja bekanntlich der Körper $\mathbb{R}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. *Robinson* zeigte sogar ein Übertragungsprinzip von Aussagen über Zahlen oder Teilmengen von ℝ auf Zahlen oder Teilmengen von ℍ.

Um dieses Übertragungsprinzip zu erläutern, sei folgendes Beispiel betrachtet. In ℝ besitzt bekanntlich jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum; in ℍ könnte man naiverweise ebenfalls erwarten, daß die Menge der finiten natürlichen Zahlen ℕ = {1;2;3;...} in ℍ ein Supremum besitzt. Dies ist jedoch falsch; jede positive infinite Zahl (z. B. Ω) ist eine obere Schranke für die Menge N. Die Zahl Ω kann jedoch kein Supremum sein, da die kleinere Zahl $(\Omega - 1)$ ebenfalls infinit ist und auch eine obere Schranke der Menge ℕ darstellt.

Dies führt zu der wichtigen Unterscheidung zwischen internen und externen Mengen von ℍ. Nur für interne Mengen in ℍ bleiben die Eigenschaften erhalten, die für Mengen in ℝ gelten. Es sind dann alle Aussagen, die im Bereich ℝ für Mengen gelten, entsprechend für interne Mengen im Bereich ℍ wahr oder umgekehrt. Die Menge ℕ ist also in ℍ keine interne sondern eine externe Menge.

Dieses sogenannte Übertragungsprinzip läßt sich als Fundamentaltheorem beweisen und ist damit das moderne Analogon zum Kontinuitätsprinzip von *Leibniz*.

Ein weiterer Ansatz, den Körper ℍ der hyperrellen Zahlen einzuführen, stammt von *W. A. J. Luxemburg*. *Luxemburg*s Ansatz läßt sich im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre durchführen. Seine Infinitesimalzahlen (ebenso wie alle Zahlen aus ℍ) lassen sich letzten Endes durch Folgen von reellen Zahlen beschreiben. Sein Ansatz ist somit ein – fast – konstruktiver Ansatz. Es ist allerdings keine Konstruktionsmethode im strengen Sinne, da die Körpereigenschaften von ℍ dadurch bewiesen werden, daß das Lemma von *Zorn* indirekt angewandt wird.

Ziel dieses Aufsatzes ist es, die Unterrichtsinhalte für den Analysis-Unterricht ab Klasse 11 mit der Methodik der Infinitesimalmathematik bereitzustellen. Dabei gliedert sich der Aufsatz in einen Hauptteil, in der mit der Infinitesimalmathematik die wichtigsten Grundbegriffe der Analysis der 11. Klasse erarbeitet werden. Zuvor werden die unendlich kleinen Zahlen durch eine Erweiterung des Körpers ℝ zu einem Körper ℍ, dessen Elemente durch Folgen reeller Zahlen beschrieben werden, eingeführt. (Dies entspricht dem Ansatz von *W. A. J. Luxemburg*.) Die exakte mathematische Begründung wird im letzten Kapitel dargestellt. Es dient zunächst zur Orientierung für die unterrichtende Lehrkraft. Darüber hinaus sollte sich das Kapitel als Unterrichtsinhalt für den Unterricht im Leistungskurs erweitern lassen.

Das prinzipell Andere der Infinitesimal-Analysis

Das Arbeiten mit hyperreellen Zahlen kann Mathematiklehrern zunächst schwerfallen. Durch das Betrachten von Grenzwerten hat sich bei ihnen in der Regel dort ein prozeßhaftes Denken eingeschliffen, das sie spätestens in der Sekundarstufe II bei der Einführung des Grenzwertes ihren Schülern ebenfalls vermitteln – mit mehr oder weniger großem Erfolg. Bedient man sich bei der Behandlung der Differentialrechnung dagegen der hyperreellen Zahlen, sollten sich Lehrer von diesem Denken lösen, denn es kann sich für den Lernprozeß der Schüler als kontraproduktiv erweisen.

Dazu ein *Beispiel*: Beim Rechnen mit hyperreellen Zahlen geht nicht mehr – nach alter Gewohnheit – die Sekantensteigung langsam in die Tangentensteigung über, sondern der gemeinsame reelle Teil aller denkbaren hyperreellen Sekantensteigungen ist gleich der reellen Tangentensteigung. Das Berechnen der Steigung einer Kurve in einem Punkt ist im Hyperreellen ein rein statisches Problem, weil zwischen Kurve, Tangente oder Sekante bei infiniter Vergrößerung kein zeichenbarer Unterschied besteht bzw. algebraisch ein nur infinitesimaler. Für Schüler, insbesondere der elften Klassen und der Grundkurse, ist dies der entscheidende Vorteil beim Lernen. Jeder Mathematiklehrer mit Unterrichtserfahrung in diesen Klassenstufen weiß, wieviel Zeit aufgebracht werden muß, bis die Schüler einigermaßen verstanden haben, was beim Prozeß der Grenzwertbildung vor sich geht. Das Prozeßhafte geht aber den meisten Schüler später wieder aus dem Gedächtnis, unterstützt dadurch, daß sie nur noch vergleichsweise einfache Regeln anzuwenden brauchen, bei denen von Dynamik keine Spur mehr ist.

Mathematiklehrer sind dagegen an das Denken in Grenzprozessen gewöhnt. Sie müssen in der Analysis mit hyperreellen Zahlen jedoch genauso statisch denken und ausschließlich deren Begriffe verwenden wie sie es z. B. in der Algebra schon immer tun. Durch das Verwenden von hier ungeeigneten Begriffen und Vorstellungen, an die man ja 'leider' gewöhnt ist, werden Schüler allzu leicht auf falsche Fährten gelenkt und dadurch behindert.

Daraus ergibt sich der **erste Ratschlag**: Schalten Sie am besten Ihr Limes-Denken ab, suchen Sie stets Worte zu vermeiden, die Bewegung suggerieren, wie z. B.:

- geht über in,
- strebt zu,
- Grenzwert (Limes),
- wandert entlang
- konvergiert gegen
- Konvergenz
- *wird* unendlich klein, *wird* unendlich groß usw.

Statt dessen muß es immer heißen:

- wir betrachten (nur) den reellen Teil von ...,
- wir nehmen den reellen Teil von ...,
- ist infinitesimal, ist infinit!

Kennzeichnend für die herkömmliche reelle Analysis sind unendliche Prozesse, im Hyperreellen dagegen ist der Begriff 'unendlich' nicht mit einem Prozeß verknüpft. Hier wird nicht etwas (potentiell) unendlich, sondern etwas ist (aktual) unendlich. Man mache sich also bewußt davon frei, bei infinitesimalen Zahlen zur Vorstellung zu greifen, irgendetwas würde betragsmäßig immer kleiner. Infinitesimale Zahlen sind Zahlen wie andere auch, nur betragsmäßig kleiner als jegliche positive reelle Zahl. Ebenso handelt es sich bei infiniten Zahlen nicht um betragsmäßig immer größer werdende Objekte, sondern um Zahlen. Je nach Vorzeichen sind sie entweder größer oder kleiner als jede reelle Zahl. Gerade diese Zahlenvorstellung macht es den Schülern leichter, da sie auch vorher stets mit fertig seienden Zahlen umgegangen sind.

Das Wort 'Unendlich' bietet sich im Kontext hyperreeller Zahlen natürlich an. Es hat sich aber gezeigt, daß es zu viele störende Assoziationen heraufbeschwört. Vor allem die Frage, wieso der Sammelbegriff 'Unendlich' untergliedert werden kann, macht Schwierigkeiten, manchmal auch dem Lehrer: „Wenn doch ß schon unendlich klein ist, wie kann dann $ß^2$ von noch kleinerer Größenordnung sein?“ Die Auffächerung des Unendlichen in

Rechenobjekte ist aber gerade ein Kennzeichen des Hyperreellen. Man kann das ungewünschte Mitschwingen philosophisch-weltanschaulicher Vorstellungen dadurch kappen, daß man konsequent die lateinischen Bezeichnungen verwendet.

Der **zweite Ratschlag** ist also:

Sprechen Sie nie vom Unendlichen, sondern immer von infiniten und infinitesimalen Zahlen!

Statt 'Werden' denken und sprechen Sie immer 'Sein'.

2 Von den Zahlenfolgen zu den hyperreellen Zahlen

Irrationale Zahlen wie z. B. π können nur durch Folgen rationaler Zahlen dargestellt werden. Der Buchstabe π ist eine bequeme Abkürzung (und gewollte Präzisierung) von 3,14159... und die Dezimaldarstellung wiederum ist Abkürzung für eine Zahlenfolge, beispielsweise (3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; ...).

Wollen wir für alle reellen Zahlen eine gemeinsame Darstellung haben, so sind wir also auf die Folgendarstellung angewiesen. Das ergibt zwar bei den natürlichen, den ganzen und bei manchen rationalen Zahlen künstlich anmutende konstante Folgen, aber sie werden tatsächlich beim Rechnen in $\mathbb{R}$ gebraucht.

Beispiel:

$$\begin{array}{rl} \pi: & 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots \\ +\frac{1}{2}: & 0{,}5;\ 0{,}50;\ 0{,}500;\ 0{,}5000;\ \ldots \\ \hline \pi+\frac{1}{2}: & 3{,}6;\ 3{,}64;\ 3{,}641;\ 3{,}6415;\ \ldots \end{array}$$

In der Praxis addiert man nicht alle unendlich vielen Folgenglieder sondern nur dasjenige Paar von Folgengliedern, das die gewünschte Genauigkeit ermöglicht. Auch der Größenvergleich zweier reeller Zahlen gelingt erst durch die Darstellung als Zahlenfolge:

Beispiel:

$$\begin{array}{rl} \pi: & 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots \\ \sqrt{10}: & 3{,}1;\ 3{,}16;\ 3{,}162;\ 3{,}1622;\ \ldots \quad \text{also } \pi < \sqrt{10}\,. \end{array}$$

Das Rechnen mit den Folgen führt auch häufig zu Situationen, die nicht so einfach und eindeutig zu betrachten sind wie die bisherigen Beispiele.

Beispiel: $9 \cdot \frac{1}{9} = 1$.

$$\begin{array}{rlllll} 9: & 9; & 9; & 9; & 9;\ \ldots \\ \cdot\frac{1}{9}: & 0{,}1; & 0{,}11; & 0{,}111; & 0{,}1111;\ \ldots \\ \hline 1: & 0{,}9; & 0{,}99; & 0{,}999; & 0{,}9999;\ \ldots \end{array}$$

Es entsteht für die Zahl 1 zusätzlich zu der konstanten Folge $(a_n) = (1)$ eine weitere, nämlich $(b_n) = (1 - 10^{-n})$.

Der Unterschied beider Folgen ist:

$$(\#)\quad \begin{array}{rl} a: & 1{,}0;\ 1{,}00;\ 1{,}000;\ 1{,}0000;\ \ldots\ (a_n) \\ -b: & 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999;\ \ldots\ (b_n) \\ \hline d: & 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots\ (d_n) \end{array}$$

Die Differenzenfolge heiße (d_n).

Es gibt drei verschiedene Arten des Umgangs mit dieser Situation:

1. Art: Praxis der reellen Zahlen.

Jede reelle Zahl wird durch ihre dezimale Näherungsfolge dargestellt wie z. B. $\sqrt{2}$ durch (1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...). Diese Folgen sind dem Dezimalsystem angepaßt und dadurch gekennzeichnet, daß wir bei Kenntnis eines beliebigen Folgengliedes alle vorhergehenden durch Ziffernstreichung selbst herstellen können. Sie haben den Vorteil, daß es zu jeder reellen Zahl genau eine solche Folge gibt. Dieser Vorteil wird dadurch erkauft, daß keine weiteren Folgen zugelassen werden, insbesondere nicht Folgen, die einer „Neunerperiode" entsprechen. (b_n) = (0; 0,9; 0,99; 0,999; ...) wird also einfach verboten und sofort durch

(a_n) = (1; 1,0; 1,00; 1,000; ...) = (1; 1; 1; 1; ...) ersetzt.

2. Art: Theorie der reellen Zahlen.

Im Einklang mit der Rechnung $9 \cdot \frac{1}{9} = 1$ werden die beiden Folgen (a_n) und (b_n) als gleichwertige Darstellungen der Zahl 1 angesehen. Die Informationen „konstant" bzw. „streng monoton steigend", die in den Folgen stecken, bleiben in dieser Theorie unberücksichtigt. Auch (0,8; 0,98; 0,998; 0,9998; ...) wäre eine gleichwertige Beschreibung der 1. Maßgeblich dafür ist, daß die jeweilige Differenzenfolge (d_n) wie im Beispiel eine Folge ist, bei der immer mehr Nullen zwischen dem Komma und der ersten von 0 verschiedenen Ziffer auftreten.

Hinweis: Man kann von „Nullfolgen" sprechen, ohne den Grenzwert Null anzusprechen oder gar zu definieren!

3. Art: Theorie der hyperreellen Zahlen.

Die drei Folgen (a_n), (b_n) und (d_n) beschreiben hier verschiedene sog. hyperreelle Zahlen, um so die in ihnen steckenden unterschiedlichen Informationen in drei Zahlen a, b und d zu bewahren. Die Folgen (a_n) und (b_n) werden also nicht mehr als gleichwertig aufgefaßt.

Die hyperreelle Zahl a, die durch eine konstante Folge aus lauter Einsen beschrieben wird, ist nach wie vor die reelle Zahl 1; b und d sind weitere hyperreelle Zahlen. Sie sind nicht reell, weil die beschreibenden Folgen nicht konstant sein können.

Die Zahl d hat zudem eine ungemein nützliche Eigenschaft:

> Die positive Zahl d ist verschieden von der Zahl 0 und dennoch kleiner als jegliche positive reelle Zahl.

Denn für jede positive reelle Zahl r gilt $d < r$, weil ab einem bestimmten Index stets $d_n < r_n$ (mit $r_n = r$) gilt. [vgl. dazu auch Kapitel 8!]

Wir verallgemeinern folgendermaßen:

Definition 1: Jede Folge reeller Zahlen ist die Darstellung einer hyperreellen Zahl.

$\mathbb{H}$ sei die Menge aller hyperreller Zahlen.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{H}$, weil die konstanten Folgen reelle Zahlen beschreiben.

Die in unserem Beispiel (#) auftretenden hyperreellen Zahlen a, b und d zeigen bereits das Wesentliche:

(1) a ist reell, nämlich 1.

(2) b ist nicht reell, aber hyperreell und von a verschieden.

(3) d ist nicht reell, aber hyperreell mit der Eigenschaft $0 < d < r$ für jede positive reelle Zahl r. Wir nennen d deswegen „infinitesimal".

(4) Mit hyperreellen Zahlen kann normal gerechnet werden; $a - b = d$.

(5) Weil $a - b$ infinitesimal, aber $a \neq b$, nennen wir a und b „infinitesimal benachbart".

(6) Die hyperreelle Zahl b läßt sich aus einer reellen Zahl und einer infinitesimalen zusammensetzen: $b = a + (-d)$. [Beweis für die Verallgemeinerung dazu in Kapitel 4.]

Die für die Differentialrechnung wichtigsten hyperreellen Zahlen sind die infinitesimalen .

Definition 2: Eine hyperreelle Zahl a heißt infinitesimal, falls sie größer als jede negative reelle Zahl und gleichzeitig kleiner als jede positive reelle Zahl ist; andernfalls wird sie nicht so genannt.

Wichtige Folgerung:

Die Zahl 0 ist infinitesimal; sie ist die einzige reelle Zahl mit dieser Eigenschaft.
Die Grundrechenarten Addition, Subtraktion und Multiplikation mit infinitesimalen Zahlen liefern stets wieder infinitesimale Zahlen. Anders verhält es sich bei der Division, insbesondere bei der Kehrwertbildung.

Hierzu werde eine besondere Infinitesimalzahl betrachtet, die mit ω bezeichnet werden soll; sie wird durch die Folge $(\frac{1}{n})$ dargestellt.

Weil $\omega \neq 0$, kann der Kehrwert gebildet werden:

ω:	1;	1/2;	1/3;	1/4; ...
$\frac{1}{\omega}$:	1;	2;	3;	4; ...

Diese hyperreelle Zahl $\frac{1}{\omega}$ heiße Ω. Sie wird durch die Folge der natürlichen Zahlen dargestellt. Sie ist damit größer als jede (positive) reelle Zahl r. Ω ist ein Beispiel für eine „infinite" Zahl. Zugleich ist sie der Prototyp einer „hypernatürlichen" Zahl, einer infiniten Zahl, die allein durch natürliche Zahlen dargestellt werden kann. Wir bezeichnen infinitesimale Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben und infinite Zahlen mit großen griechischen Buchstaben.

Definition 3: Eine hyperreelle Zahl A (groß α) heißt *positiv infinit*, falls sie größer als jede reelle Zahl ist.
Eine hyperreelle Zahl A (groß α) heißt negativ infinit, falls sie kleiner als jede reelle Zahl ist. Jede andere Zahl – also auch jede reelle Zahl – heißt *finit.*

Von den Grundrechenarten mit infiniten Zahlen liefert nur die Multiplikation stets wieder infinite Zahlen.

Folgende Tabellen geben eine Übersicht über alle Grundrechenarten mit infiniten Zahlen A, B, Γ und finiten Zahlen f. Unter den finiten Zahlen sind die Spezialfälle, nämlich die infinitesimalen Zahlen α, β, γ und die reellen Zahlen x, y, z, besonders hervorgehoben, denn jede finite Zahl ist die Summe aus einer infinitesimalen und einer reellen Zahl.
Beispiel: $\beta + x = f$ (Vgl. Additionstabelle)

+	α	x	A
β	γ	f	Γ
y	f	z	Γ
B	Γ	Γ	?

–	α	x	A
β	γ	f	Γ
y	f	z	Γ
B	Γ	Γ	?

·	α	x	A
β	γ	γ	?
y	γ	z	Γ
B	?	Γ	Γ

:	$\alpha \neq 0$	$x \neq 0$	A
β	?	γ	γ
y	Γ	z	γ
B	Γ	Γ	?

Die Fragezeichen in den Tabellen geben die Fälle an, wo Ergebnisse entstehen, die nur mit genauerer Kenntnis der beteiligten Zahlen den Kategorien infinitesimal, reell, finit oder infinit eindeutig zugeordnet werden können.

Dazu zwei Rechenbeispiele: (letztes Fragezeichen in der Divisionstabelle)

1. Wir betrachten den Ausdruck $\frac{2\Omega+3}{3\Omega-1}$ und verwenden, daß $\frac{1}{\Omega} = \omega$ infinitesimal ist. Dann ergibt sich:
$\frac{2\Omega+3}{3\Omega-1} = \frac{\omega(2\Omega+3)}{\omega(3\Omega-1)} = \frac{2+3\omega}{3-\omega}$ „$=\frac{\text{finit}}{\text{finit}}$" ist *finit* (nicht infinitesimal).
2. $\frac{2\Omega+3}{\Omega^2-1} = \frac{\omega(2\Omega+3)}{\omega(\Omega^2-1)} = \frac{2+3\omega}{\Omega-\omega}$ „$=\frac{\text{finit}}{\text{infinit}}$" ist *infinitesimal.*

3 Veranschaulichung hyperreeller Zahlen

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{H}$ bilden drei angeordnete, ineinander geschachtelte Zahlenkörper. Stellt man diese Körper graphisch dar, so zeichnet man schon beim kleinsten von ihnen wegen dessen Dichtheit eine durchgezogene Linie. Man suggeriert damit Kontinuität, obwohl man von irrationalen Zahlen weiß, die bekanntlich nicht zum Körper $\mathbb{Q}$ gehören, aber in Lücken zwischen rationalen Zahlen liegen. Genauso sind finite hyperreelle Zahlen, die nicht Elemente des reellen Zahlenkörpers sind, zusätzliche Zahlen, die zwischen reellen Zahlen liegen. Es stellt sich somit die Frage, ob Stetigkeit im Hyperreellen verletzt ist bzw. ob eine durchgezogene Linie die adäquate Darstellung ist.

Hier sei auf *Dedekind* verwiesen, der „ ... durch eine Schöpfung von neuen Zahlen der Art, daß das Gebiet der Zahlen dieselbe Vollständigkeit oder, wie wir gleich sagen wollen, dieselbe Stetigkeit gewinnt wie die gerade Linie." die reellen Zahlen einführte. Er bezieht also die Eigenschaft des Zahlenkörpers auf dessen Veranschaulichung durch eine Linie. Schließlich kommentiert er sein Prinzip selbst mit den Worten: „Es ist mir sehr lieb, wenn jedermann das...Prinzip so einleuchtend finde und so übereinstimmend mit seinen Vorstellungen von einer Linie; denn ich bin außerstande, irgendeinen Beweis für seine Richtigkeit beizubringen, und niemand ist dazu imstande. Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein Axiom, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken." (*Dedekind* zitiert nach *Spalt* [19])

Die Stetigkeit einer Linie braucht also nicht bewiesen zu werden, man erkennt ihr diese Eigenschaft von vornherein zu, und zwar unabhängig davon, welchen Ausschnitt welchen Zahlenkörpers sie gerade darstellt. Die Frage nach Dichtheit und Vollständigkeit der Zahlenkörper sind für ihre geometrische Repräsentation somit genauso unerheblich wie das Problem, wo auf der Zahlengerade des kleineren Körpers die Lücken für weitere Zahlen sind. Derartige Fragestellungen sind eher psychologische Hindernisse.

Eine Linie ist also per se stetig. Dies gilt unabhängig vom Maßstab der Darstellung, und diese Eigenschaft bleibt auch bei Vergrößerung und Verkleinerung der Abbildung erhalten. Insbesondere auch dann, wenn zur Darstellung hyperreeller Nachbarn reeller Zahlen die Zahlengerade infinit vergrößert werden muß.

Damit haben wir eine erste Möglichkeit, uns ein Bild von den hyperreellen Zahlen zu machen.

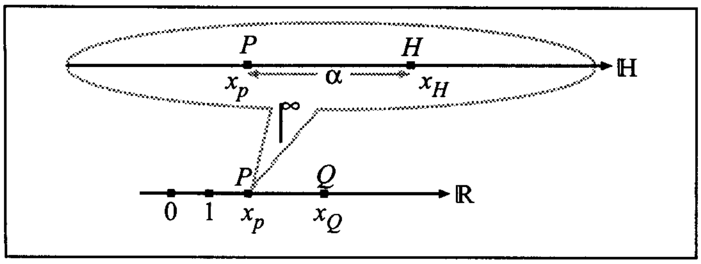


Fig. 1

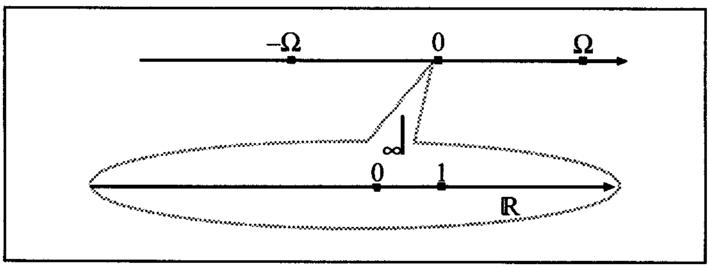
In Fig. 1 sehen wir zunächst wie gewohnt einen Ausschnitt der reellen Zahlengeraden; zwei Punkte P und Q mit ihren reellen Koordinaten x_P und x_Q sind hervorgehoben. Auch wenn wir uns die zusätzlichen hyperreellen Zahlen hinzu denken und die Bezeichnung ℝ durch ℍ ersetzen würden, ändert sich an der Zeichnung zunächst nichts. Jeder Punkt H mit einer hyperreellen Koordinate x_H, der zu P infinitesimal benachbart ist, fällt zeichnerisch mit P zusammen. Wollen wir nämlich wie im Bild für α 4,5 Einheiten erhalten, müßten wir eine infinite Maßstabsvergrößerung mit dem Faktor $\frac{4{,}5}{\alpha}$ durchführen.

Schauen wir uns nun die hyperreell erweiterte Gerade beim Punkt P durch eine „Unendlichkeitsbrille" an. Sie zeigt uns diese Gerade unendlich stark vergrößert, nämlich mit dem infiniten Faktor $\frac{4{,}5}{\alpha}$ stärker vergrößert als je ein reeller Zahlenfaktor es ausdrücken könnte. Wir sehen so einen Ausschnitt der hyperreellen Geraden mit lauter „hyperreellen Punkten" (Punkten mit hyperreeller Koordinate), unter denen höchstens einer reell sein kann, nämlich genau derjenige Punkt P, an dem vergrößert wurde. Anders ausgedrückt: Wir sehen höchstens den Punkt P mit seiner reellen Koordinate x_P und um ihn herum nur hyperreelle, nicht reelle Punkte wie H.

Hätte nämlich ein beliebiger von P verschiedener Punkt H auch reelle Koordinaten, dann wäre der Abstand $| x_H - x_P |$ der beiden Punkte H und P von Null verschieden und auch reell. Ist H das Bild von Q nach der Vergrößerung, so könnte man den Vergrößerungsfaktor der Brille berechnen als $\frac{x_Q - x_P}{x_H - x_P}$. Er wäre ebenfalls reell und nicht infinit wie vorausgesetzt.

Von den infiniten hyperreellen Zahlen dagegen „sehen" wir erst dann etwas, wenn wir die normale reelle Zahlengerade derart verkleinern, daß alle reellen Zahlen ins Bild passen. Dann erst können links und rechts die Bereiche der infiniten Zahlen in die Zeichnung aufgenommen werden.

Fig. 2



Damit z. B. der Abstand von 0 bis Ω 2 Einheiten wird, müssen wir den Maßstab der hyperreellen Zahlengeraden mit dem infinitesimalen Faktor 2/Ω verändern. Die Teilmenge der finiten Zahlen „schrumpft" dadurch auf einen Punkt in der Zeichnung zusammen – in Fig. 2 mit 0 bezeichnet. Alle finiten Zahlen sind bei dieser Verkleinerung genau so um die Null zu denken wie bei üblicher Darstellung infinitesimale Zahlen um ihren reellen Nachbarn herum.

Man sieht einer Zahlengeraden also nicht von vornherein an, welche Zahlenmenge sie darstellt. Daher ist auch eine eindeutige Kennzeichnung erforderlich, damit ein Betrachter schnell erkennt, ob reelle, finite hyperreelle oder infinite hyperreelle Zahlen dargestellt werden. Hier bietet sich an, die beim algebraischen Arbeiten mit hyperreellen Zahlen verwendete Schreibweise auch in der graphischen Darstellung zu benutzen. Z. B. sollte man infinitesimale Zahlen mit kleinen und infinite Zahlen mit großen griechischen Buchstaben bezeichnen. Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen dann die finiten hyperreellen Zahlen und damit, wie gewohnt, die darin eingebetteten reellen Zahlen.

4 Reeller Teil finiter hyperreeller Zahlen

Da der reelle Zahlenkörper ℝ in den hyperreellen Körper ℍ eingebettet wird, lassen sich alle Zahlen aus ℝ im Körper ℍ wiederfinden. Z. B. ist die hyperreelle Zahl $*\sqrt{2}$, die sich durch die konstante Folge $(\sqrt{2})$ darstellen läßt, rechentechnisch nicht von der reellen Zahl $\sqrt{2}$ zu unterscheiden. Ganz allgemein gibt es zu jeder reellen Zahl r (bzw. s) diejenige hyperreelle Zahl $*r$ (bzw. $*s$), die durch die konstante Folge (r_n) mit $r_n = r$ (bzw. (s_n) mit $s_n = s$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) dargestellt werden kann. Es ist klar, daß sich dann beispielsweise ergibt $*(r + s) = *r + *s$, daß sich also das gliedweise Rechnen mit den hyperreellen Zahlen $*r$, $*s$ nicht vom Rechnen mit den reellen Zahlen r, s unterscheidet; es sind ja schließlich die benutzten Folgenglieder. Daher wird zwischen beiden Zahlentypen kein Unterschied mehr gemacht.

Die Menge ℝ der reellen Zahlen ist also echte Teilmenge der Menge ℍ der hyperreellen Zahlen. Oder umgekehrt: ℍ ist eine Erweiterung von ℝ.

Satz: Eine hyperreelle h Zahl ist finit genau dann, wenn es relle Zahlen s und t so gibt, daß $s < h < t$ gilt. Der Beweis ergbt sich unmittelbat aus Definition 3.

Die wichtigste Eigenschaft der finiten hyperreellen Zahlen zeigt der folgende

Satz: Jede finite hyperreelle Zahl h besitzt einen reellen Teil; d. h. es gibt eine reelle Zahl r so, daß $h = r + \alpha$ und α infinitesimal. Dabei sind die Zahlen r und α eindeutig bestimmt.

Beweis: Ausgehend von $s < h < t$ und s, t reell, konstruieren wir mittels Intervallhalbierung eine Intervallschachtelung.

1. Schritt:

falls $\frac{s+t}{2} < h$, setze $s_1 := \frac{s+t}{2}$ und $t_1 := t$,

falls $\frac{s+t}{2} > h$, setze $s_1 := s$ und $t_1 := \frac{s+t}{2}$,

falls $\frac{s+t}{2} = h$, so ist h reell und es ist nichts zu zeigen ($h = h + 0$).

Jeder weitere Schritt ist entsprechend, so daß wir erhalten (vorausgesetzt, daß h nicht selbst reell ist):

für jeden Index n: $s_n < h < t_n$ und $t_n - s_n = \frac{s-t}{2^n}$ und t_n, s_n reell.

Diese Intervallschachtelung definiert eine reelle Zahl r (das ist die Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$, die hier unbedingt gebraucht wird!) mit der Eigenschaft:
für jeden Index n: $s_n \leq r < t_n$.

Sei nun $\alpha := h - r$ und $\beta := (t_n - s_n)$, dann ist β jedenfalls infinitesimal, denn β wird durch eine Nullfolge beschrieben). Ferner ist $|\alpha| < \beta$, womit also auch α infinitesimal ist. Wir haben somit gefunden: $h = r + \alpha$ mit r reell und α infinitesimal.

Die Zerlegung ist eindeutig bestimmt.

Wäre nämlich $h = r + \alpha$ und mit $h = s + \beta$ eine zweite Zerlegung gegeben (r und s reell, α und β infinitesimal), dann wäre $r + \alpha = s + \beta$ und gleichwertig damit $r - s = \beta - \alpha$. Weil auf der linken Seite dieser Gleichung eine reelle Zahl, auf der rechten eine infinitesimale Zahl steht, kann die Gleichung nur auf beiden Seiten durch Null erfüllt sein.

Dies führt zu folgender

Definition: Der eindeutig bestimmte reelle Teil einer finiten hyperreellen Zahl soll abkürzend mit $RT(h)$ bezeichnet werden.

Speziell ist die Zahl 0 der reelle Teil jeder infinitesimalen Zahl α, denn es gilt: $\alpha = 0 + \alpha$.

Der folgende Satz zeigt, daß RT eine Funktion darstellt, deren Definitionsbereich der Ring der finiten hyperreellen Zahlen ist und deren Wertebereich der Körper der reellen Zahlen ist. Da die Funktion RT mit den algebraischen Operationen verträglich ist, ist sie ein Ringhomomorphismus.

Satz: Für alle finiten hyperreellen Zahlen g und h gilt:

1) $RT(g + h) = RT(g) + RT(h)$,
2) $RT(g - h) = RT(g) - RT(h)$,
3) $RT(g \cdot h) = RT(g) \cdot RT(h)$,
4) $RT(g / h) = RT(g) / RT(h)$, falls $RT(h) \neq 0$.

Beweis: Es sei $g = r + \alpha$, $h = s + \beta$ (also $r = RT(g)$, $s = RT(h)$, α und β infinitesimal)

zu 1) 1. Beweismöglichkeit:

$g + h = (r + \alpha) + (s + \beta) = (r + s) + (\alpha + \beta)$

$g + h$ ist also zusammengesetzt aus der reellen Zahl $(r + s)$ und der Infinitesimalzahl $(\alpha + \beta)$; diese Darstellung ist eindeutig, daher ist der reelle Teil der Summe $g + h$ gleich der Summe der reellen Teile, $r + s$;

$RT(g + h) = RT(g) + RT(h)$.

2. Beweismöglichkeit:

$(g + h) - (r + s)$ ist infinitesimal, denn:

$((r + \alpha) + (s + \beta)) - (r + s) = \alpha + \beta$.

zu 2) analog zu 1)

zu 3) analog zu 1)

zu 4) analog zu 1)

Hinweis zu 4: 2. Beweismöglichkeit: „$\frac{(r+\alpha)}{(s+\beta)} - \frac{r}{s}$ ist infinitesimal" ist einfacher.

Es ist nicht möglich, die Grenze zwischen den Bereichen „finit" und „infinit" anzugeben.

Denn angenommen, es gäbe eine solche Grenzzahl g, so daß für alle finiten Zahlen f und alle infiniten Zahlen A gilt:

$|f| \leq |g| \leq |A|$, dann könnte sein:

1) g ist eine infinite Zahl A_0.

Dann aber ist es $(|A_0| - 1)$ ebenfalls. Andernfalls gäbe es nämlich eine reelle Zahl r mit $|A| - 1 < r$, d. h. aber $|A_0| < r + 1$. $|A_0|$ jedoch ist größer als jede reelle Zahl, kann also nicht kleiner sein als die reelle Zahl $(r + 1)$.

Für die Grenzzahl g kann $g = A_0$ daher nicht stimmen; denn es wäre $(|A_0| - 1)$ eine infinite Zahl mit $|A_0| - 1 < |g|$.

2) g ist eine finite Zahl f_0;

d. h. es gibt eine reelle Zahl r mit $|f_0| < r$. Aber r und auch die reelle Zahl $(r + 1)$ sind ebenfalls finit und es gilt
$(|f_0| + 1) < (r + 1)$.

Für die Grenzzahl g kann $g = f_0$ auch nicht stimmen; denn es wäre $(|f_0| + 1)$ eine finite Zahl mit $|g| < |f_0| + 1$.

Folgerung: Zu infiniten hyperreellen Zahlen A gibt es keinen reellen Teil,
denn dies wäre ja eine reelle Zahl, die infinitesimal benachbart sein müßte; aber selbst im Abstand 1 von A findet sich ja keine finite, also auch keine reelle Zahl!

Anhand folgenden Beispiels soll die Bestimmung des reellen Teils gezeigt werden:

$$\frac{2\Omega+3}{3\Omega-1}.$$

Am Ende von Kapitel 2 wurde bereits erkannt, daß dieser Ausdruck eine finite Zahl beschreibt.Bei einem finiten Ergebnis gibt es den eindeutig bestimmten reellen Teil. Wir benutzen zur Berechnung den zuletzt genannten Satz.

$$RT\left(\frac{2\Omega+3}{3\Omega-1}\right) = RT\left(\frac{2+3\omega}{3-\omega}\right) = \frac{RT(2+3\omega)}{RT(3-\omega)} = \frac{2}{3}.$$

5 Hyperreelle Erweiterung reeller Funktionen

Es sei nun die Funktion

$f\colon x \mapsto 2x$, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$

als ein Beispiel für eine reelle Funktion betrachtet. Da zum anderen offensichtlich auch jede hyperreelle Zahl x mit der hyperreellen Zahl ^{*2} multipliziert werden kann, ist die Funktion $^*f\colon x \mapsto {}^*2x$, $D = \mathbb{H}$, $W = \mathbb{H}$ eine hyperreelle Funktion. Da in beiden Fällen die Zuordnungsvorschrift übereinstimmt, wird $^*f$ als hyperreelle Erweiterung der Funktion f bezeichnet. In den allermeisten Fällen der Praxis wird schließlich das Unterscheidungsmerkmal '*' weggelassen.

Analog kann unmittelbar die hyperreelle Erweiterung einer Polynomfunktion oder sogar einer gebrochen rationalen Funktion angegeben werden. Sei etwa

$$g(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}, \quad D = \mathbb{R}\backslash N,\ W = \mathbb{R}$$

die Zuordnungsvorschrift einer gebrochen rationalen Funktion (wobei N die Menge aller Nullstellen der Polynomfunktion im Nenner bezeichne), so erhält man unmittelbar daraus die hyperreelle Erweiterung $^*g$, indem $D = \mathbb{H}\backslash\mathrm{N}$, $\mathrm{W} = \mathbb{H}$ gesetzt wird, da ja alle Funktionswerte durch Grundrechenoperationen bestimmt werden. Zusätzliche Nullstellen können in $\mathbb{H}$ nicht existieren.

Es sollen noch zwei weitere Beispiele diskutiert werden. Bei der Wurzelfunktion

$$w(x) = \sqrt{x}\,, D = \mathbb{R}_0^+,\ W = \mathbb{R}$$

lassen sich bei der Erweiterung $*w$, $D = \mathbb{H}_0^+$, $W = \mathbb{H}$ die Funktionswerte nicht durch die Grundrechenoperationen bestimmen. Da aber jede hyperreelle Zahl durch eine Folge reeller Zahlen beschrieben wird, ermöglicht das gliedweise Ziehen der Quadratwurzel das Bestimmen der Funktionswerte.

Sei nämlich a eine positive hyperreelle Zahl, die durch eine Folge (a_n) von positiven reellen Zahlen beschrieben wird. Dann wird die Zahl $\sqrt{a}$ durch die Folge $(\sqrt{a_n})$ beschrieben, denn weil $(\sqrt{a_n})^2 = (\sqrt{a_n^{\,2}}) = (a_n)$ für jeden Index n gilt, stimmt auch $(\sqrt{a})^2 = a$.

(Wird a durch eine Folge (a_n) beschrieben, deren Glieder nicht alle positiv sind, dann müssen auf jeden Fall genügend viele Folgenglieder positiv sein. In diesem Fall ersetzen wir vorhandene negative Glieder (zu denen eine reelle Quadratwurzel nicht existiert) durch beliebige positive Zahlen, ohne dadurch die Zahl a zu verändern. Vgl. Kapitel 8)

Ebenso lassen sich bei der hyperreellen Erweiterung der Sinusfunktion die Funktionswerte gliedweise bestimmen:

$$*\sin\colon\ x \mapsto \sin(x),\ D = \mathbb{H},\ W = \mathbb{H}.$$

Für die Zahl $x \in \mathbb{H}$, beschrieben durch die Folge (x_n), wird $*\sin(x)$ durch die Folge $(\sin(x_n))$ beschrieben. Über diese Darstellung kann z. B. die 2π-Periodizität leicht bewiesen werden. Sei nämlich h eine hyperreelle Zahl, die durch die Folge (h_n) beschrieben wird, dann wird die Zahl $h + 2\pi$ durch die Folge $(h_n + 2\pi)$ beschrieben, und da für alle Folgenglieder $\sin(h_n + 2\pi) = \sin(h_n)$ gilt, erhält man

$$*\sin(h + 2\pi) = *\sin(h).$$

Unsere Untersuchungsgegenstände bleiben natürlich weiterhin die reellen Funktionen, ihre hyperreellen Erweiterungen sind aber äußerst bequeme Hilfsmittel, besondere Eigenschaften zu erkennen.

Dazu sei als Beispiel die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{2x+1}{x},\ x > 0$ betrachtet.

Schon der Verlauf des Graphen läßt vermuten, daß er sich mit wachsendem Argument x immer mehr der Geraden mit der Gleichung $a(x) = 2$ nähert.

Die Begründung wird einfach, wenn die Funktion hyperreell erweitert wird. Denn $*f$ braucht nur an einer (beliebigen) positiv infiniten Stelle X berechnet zu werden.

Es ist nämlich $*f(X) = \frac{2X+1}{X} = 2 + \frac{1}{X}$ endlich, denn $\frac{1}{X}$ ist infinitesimal. Geht man zum reellen Teil über, so folgt sofort: $RT(*f(X)) = 2$, was offenbar für jede positiv infinite Stelle X gilt. Im Infiniten unterscheiden sich die beiden Graphen von $*f$ und $*a$ also nur infinitesimal. Im Reellen heißt a daher Asymptotenfunktion zu f.

Das nächste Beispiel zeigt das Verhalten der Funktion

$f\colon x \to \frac{3x^2 - 11x + 10}{x-2}$ an der Definitionslücke x_0 ($x_0 = 2$). Alle von x_0 verschiedenen und infinitesimal benachbarten Zahlen werden durch $x_0 + \alpha$ beschrieben, wobei a infinitesimal und verschieden von 0 ist. Berechnet man $*f(x_0 + \alpha)$ und geht durch Bilden des reellen Teils davon anschließend zu den reellen Zahlen zurück, so erhält man:

$$*f(2+\alpha) = \frac{3(2+\alpha)^2 - 11(2+\alpha) + 10}{(2+\alpha) - 2} = \frac{3\alpha^2 + \alpha}{\alpha} = 3\alpha + 1,$$

also $RT(3\alpha + 1) = 1$.

Also läßt sich f an der Stelle x_0 stetig fortsetzen.

6 Ableitung reeller Funktionen f mit Hilfe ihrer hyperreellen Erweiterung $*f$

Die folgende Skizze deutet zunächst das Vorgehen an, wenn die Steigung des Graphen einer Funktion f an einer Stelle x_0 ermittelt werden soll.

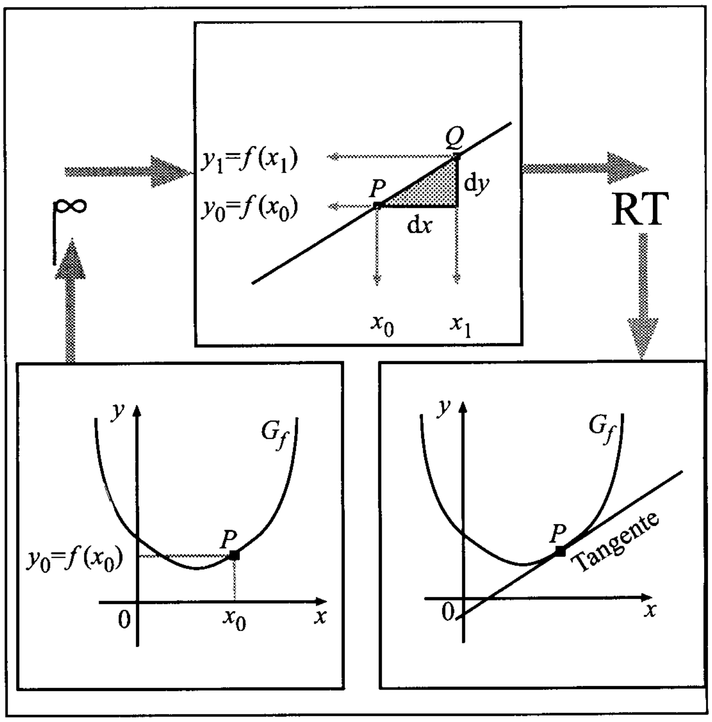


Fig. 3

Zunächst wird die Ebene $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ mit dem Faktor $\frac{1}{\alpha}$ (α sei eine beliebige, von Null verschiedene Infinitesimalzahl) so vergrößert, daß der Graph von $*f$ und insbesondere der Punkt P: $(x_0; f(x_0))$ sichtbar bleibt. In jedem endlichen Ausschnitt dieser Vergrößerung ist P dann der *einzige* Punkt mit reellen Koordinaten! Erscheint der Funktionsgraph dabei als ein Geradenstück, so führt das Verfahren zum Ziel und die ursprüngliche Funktion f heißt in x_0 differenzierbar. Betrachtet man z. B. die Funktion f mit $f(x)=x^2$, so erhält man die Punkte P: $(x_0; x_0^2)$ und Q: $(x_1; x_1^2) = (x_0 + \alpha; (x_0 + \alpha)^2) = (x_0 + \alpha; x_0^2 + 2\alpha x_0 + \alpha^2)$. Der Summand α^2 entspricht der Abweichung von einer exakten Geraden innerhalb des Intervalls $[x_0; x_0 + \alpha]$. Da jedoch α^2 im Vergleich zu α ebenfalls infinitesimal klein ist, ist diese Abweichung nicht zeichenbar. Allenfalls bei einer Vergrößerung um den Faktor $\frac{1}{\alpha^2}$ würde diese Abweichung sichtbar, dann würde jedoch entweder die Stelle x_0 oder die Stelle $x_0 + \alpha$ aus jedem endlichen Blickfeld geraten.

Die Steigung, die durch die Punkte P und Q definiert wird, ist

$$m = \frac{x_0^2 + 2x_0\alpha + \alpha^2 - x_0^2}{x_0 + \alpha - x_0} = \frac{2x_0\alpha + \alpha^2}{\alpha} = 2x_0 + \alpha.$$

Die Steigung der Geraden t, die exakt mit derjenigen übereinstimmt, die die Vergrößerung ergeben hat, ist

$$m_t = \frac{x_0^2 + 2x_0\alpha - x_0^2}{x_0 + \alpha - x_0} = \frac{2x_0\alpha}{\alpha} = 2x_0.$$

Sie ergibt sich auch durch das Abspalten des reellen Teils von m: $RT(m) = RT(2x_0 + \alpha) = 2x_0$. Die durch die infinite Vergrößerung ins Blickfeld tretende Gerade behält also auch in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ihren Sinn; sie heißt Tangente und ihre Steigung ist die Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0.

Als zweites Beispiel soll die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3 + 2x^2$ an einer Stelle x_0 ermittelt werden. Es sei $\alpha \neq 0$ eine beliebige Infinitesimalzahl. Es sind dann die Punkte P: $(x_0;\ x_0^3 + 2x_0^2)$ und Q: $(x_0 + \alpha;\ (x_0 + \alpha)^3 + 2(x_0 + \alpha)^2)$

$= (x_0 + \alpha;\ x_0^3 + 3x_0^2\alpha + 3x_0\alpha^2 + \alpha^3 + 2x_0^2 + 4x_0\alpha + 2\alpha^2)$ zu betrachten.

Die Steigung durch P und Q ist:

$$\begin{aligned} m &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2\alpha + 3x_0\alpha^2 + \alpha^3 + 2x_0^2 + 4x_0\alpha + 2\alpha^2 - x_0^3 - 2x_0^2}{x_0 + \alpha - x_0} \\ &= \frac{3x_0^2\alpha + 3x_0\alpha^2 + \alpha^3 + 4x_0\alpha + 2\alpha^2}{\alpha} \\ &= 3x_0^2 + 3x_0\alpha + \alpha^2 + 4x_0 + 2\alpha. \end{aligned}$$

Der Übergang zum reellen Teil ergibt

$$RT(m) = RT(3x_0^2 + 3x_0\alpha + \alpha^2 + 4x_0 + 2\alpha) = 3x_0^2 + 4x_0\ .$$

Da die Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht festgelegt war, folgt:

$f' : x \mapsto 3x^2 + 4x$ ist die Ableitungsfunktion von f: $x \mapsto x^3 + 2x^2$

Im Zusammenhang mit dieser „Differentialrechnung" werden folgende Begriffe benutzt:

Die in Zähler und Nenner verwendeten Differenzen sind infinitesimal; daher sollen sie als Differentiale bezeichnet und – an *Leibniz* erinnernd – mit dy und dx abgekürzt werden. Das führt zur folgenden

Definition 4: Jede infinitesimale Differenz hyperreeller Zahlen heißt *Differential*, jeder Quotient von Differentialen heißt *Differentialquotient.*

Es muß $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, weil tatsächlich dividiert wird, natürlich „dy durch dx" gelesen werden und nicht „dy nach dx".

Für die Ableitung einer Funktion f mit $y = f(x)$ an einer Stelle x_0 gilt also

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= RT\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = RT\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right) \\ &= RT\left(\frac{f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)}{\mathrm{d}x}\right),\ (\mathrm{d}x \neq 0 \text{ infinitesimal}). \end{aligned}$$

Definition: Eine Funktion heißt an einer Stelle x_0 *differenzierbar* genau dann, wenn $RT\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ für jedes Differential $\mathrm{d}x \neq 0$ existiert und stets dieselbe reelle Zahl ist.

Der wesentliche Unterschied zur Grenzwertdefinition der Ableitung liegt darin, daß kein dynamischer Prozeß gedacht werden muß sondern einfach infinitesimale Teile weggelassen werden. Das praktizieren Schüler, Lehrer und Naturwissenschaftler auch in der Grenzwertanalysis, nur teils gedankenlos, teils mit schlechtem Gewissen.

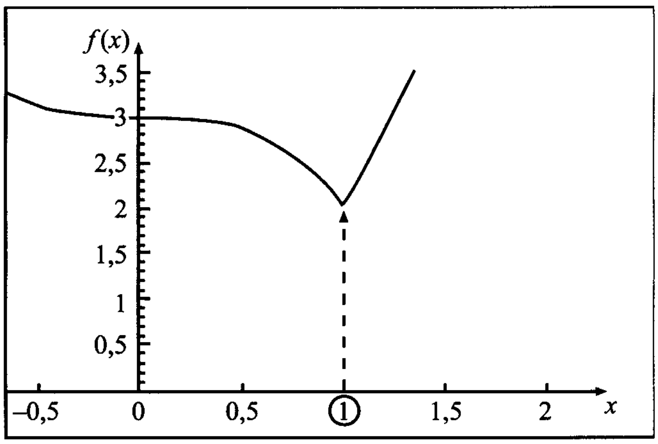
Bekanntlich gibt es auch Funktionen, die an gewissen Stellen nicht differenzierbar sind, weil die Graphen beispielsweise dort einen Knick oder eine Sprungstelle besitzen. Für beide Fälle sollen die folgenden Beispiele ebenfalls die Leistungsfähigkeit der Grenzwert-Analysis belegen.

Zuerst sei die Funktion f mit $f(x) = 2 + |x^3 - 1|$ an der Stelle $x_0 = 1$ betrachtet, die dort wegen der enthaltenen Betragsfunktion einen Knick besitzt, wie das zugehörige Bild zeigt.

Die folgende Rechnung überführt die Funktionsgleichung zunächst in betragsfreie Schreibweise und ermittelt danach die Differentialquotienten links von x_0 ($\mathrm{d}x < 0$) sowie rechts von x_0 ($\mathrm{d}x > 0$) parallel.

$$f(x) = 2 + |x^3 - 1| = \begin{cases} 2 + (x^3 - 1) & \text{für } (x^3 - 1) \geq 0 \\ 2 - (x^3 - 1) & \text{für } (x^3 - 1) < 0 \end{cases}$$

$$\text{also } f(x) = \begin{cases} 1 + x^3 & \text{für } x \geq 1 \\ 3 - x^3 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$



links von 1, d. h. $\mathrm{d}x < 0$	rechts von 1, d. h. $\mathrm{d}x > 0$
$f(x) = 3 - x^3$	$f(x) = 1 + x^3$
$\mathrm{d}y = f(1 + \mathrm{d}x) - f(1) = 3 - (1 + \mathrm{d}x)^3 - 2$	$\mathrm{d}y = f(1 + \mathrm{d}x) - f(1) = 1 + (1 + \mathrm{d}x)^3 - 2$
$= 1 - (1 + 3\mathrm{d}x + 3(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3)$	$= -1 + (1 + 3\mathrm{d}x + 3(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3)$
$= -(3\mathrm{d}x + 3(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3)$	$= 3\mathrm{d}x + 3(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-(3\mathrm{d}x + 3(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3)}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3\mathrm{d}x + 3(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3}{\mathrm{d}x}$
$= -3 + (-3\mathrm{d}x - (\mathrm{d}x)^2)$	$= 3 + (3\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2)$
$RT\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = -3$	$RT\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = +3$

Genau wie in der Grenzwert-Analysis erhält man, daß die Kurve von links her fällt (Steigung –3), während sie nach rechts hin steigt (Steigung +3).

Als Beispiel für eine Sprungstelle sei die Funktion f mit $f(x) = 4$ für $x \neq 2$ und $f(2) = 7$ an der Stelle $x_0 = 2$ untersucht. Abgesehen

Grenzwert-Analysis

übliche erste Vermutung: $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$.

Leichte Widerlegung anhand eines Beispiels.

$$x^3 \cdot x^2 = x^5$$

$$3x^2 \cdot 2x \neq 5x^4$$

1. Diskussion des Beispiels, um Möglichkeiten zu finden, den Faktor 5 und den Exponenten 4 zu erhalten.

Weitere Beispiele dieser Art wie $x^4 \cdot x^2, x^3 \cdot x^3, x^2 \cdot x^2$

2. sofern Ableitung der Sinusfunktion und Kettenregel bekannt sind:

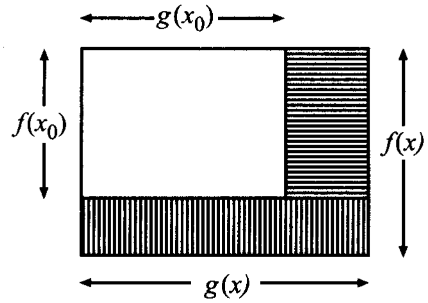
$$\sin^2(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$$

$$2\sin(x) \cdot \cos(x) = \cos(x) \cdot \sin(x) + \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Schüler vermuten die (richtige) Produktregel.

Beweis der Produktregel mit Hilfe eines Tricks, auf den man nur deswegen kommt, weil man das Ergebnis schon kennt: Man addiert einen Term und subtrahiert ihn sofort wieder, so daß insgesamt Null addiert wurde.

Eine didaktische Verbesserung der Situation bringt die geometrische Interpretation der Änderung der Produktfunktion $f \cdot g$ durch Abänderung der Stelle x_0 zu einer Stelle x.



Der Grenzübergang für $x \to x_0$ liefert dann aus der relativen Änderung

$$\frac{f(x_0)[g(x)-g(x_0)]+g(x)[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}$$

sofort $f(x_0) \cdot g'(x_0) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \cdot f'(x_0)$.

Selbst bei diesem Vorgehen muß noch der Satz von der Stetigkeit differenzierbarer Funktionen auf die Funktion g explizit angewandt werden, um die Produktregel zu erhalten.

Infinitesimal-Analysis

Zur Abkürzung sei gesetzt:

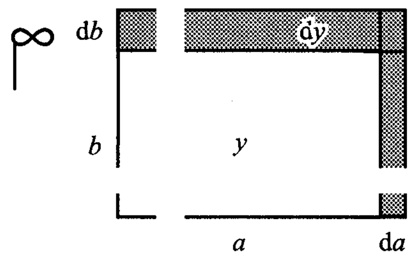
$$y = f(x_0) \cdot g(x_0); \quad a = f(x_0); \quad b = g(x_0).$$

Weil f und g differenzierbar sind, liefert jedes Differential dx Differentiale da und db.

Dann ist $y = ab$ und $y + \mathrm{d}y = (a + \mathrm{d}a)(b + \mathrm{d}b)$,

also $\mathrm{d}y = a \cdot \mathrm{d}b + b \cdot \mathrm{d}a + \mathrm{d}a \cdot \mathrm{d}b$.

Das läßt sich geometrisch veranschaulichen.



Das Rechteck wird infinit so vergrößert, daß seine obere rechte Ecke sichtbar ist. (Die angedeuteten Auslassungen ermöglichen trotz dieser Vergrößerung – a und b sind in diesem Maßstab Längen unendlich langer Strecken! – den vollen Überblick.)

Das Differential dy setzt sich ersichtlich aus den drei oben errechneten Summanden zusammen.

Als Differentialquotient ergibt sich dann

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} + b\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + \mathrm{d}a\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x},$$

wovon man lediglich den reellen Teil bildet. Man erhält die Produktregel

$$y' = ab' + ba' + 0 \cdot b'$$

oder mit den Funktionstermen geschrieben:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0).$$

davon, daß es in infinitesimaler Nähe um diesen Punkt $P(x_0;y_0)$ keinen Kurvenpunkt Q gibt, ergibt die Bildung des Differentialquotienten trotzdem – im Gegensatz zur Grenzwert-Analysis – eine sinnvolle Aussage. Mit d$x \neq 0$ erhält man nämlich

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{4-7}{\mathrm{d}x} = \frac{-3}{\mathrm{d}x}.$$

Dies ist eine infinite hyperreelle Zahl, die bekanntlich keinen reellen Teil besitzt. Es gibt also keine 1. Ableitung an der Stelle $x_0 = 2$.

7 Ableitungsregeln

Im Anfangsunterricht der Differentialrechnung in der 11. Klasse werden normalerweise die Potenzregel mit Konstantenregel und Identitätsregel, die Summenregel und die Faktorregel bewiesen. Im Kurssystem der gymnasialen Oberstufe folgen schließlich Produkt-, Quotienten- und Kettenregel.

Die Gleichung für die Ableitungsfunktion der Potenzfunktion mit $f(x) = x^n$ lautet bekanntlich $f'(x) = nx^{n-1}$. Entsprechend der Infinitesimal-Methode erfolgt der Beweis dadurch, daß man den Differentialquotienten der hyperreell erweiterten Potenzfunktion f bildet. Sei $n \geq 2$ und d$x \neq 0$, so ergibt er sich zu

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^n - x^n}{dx}.$$

Der Zähler stellt eine Differenz zweier Potenzen mit gleichen Exponenten dar, der mit Hilfe der 'dritten binomischen Formel höherer Ordnung'

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

umgeformt werden kann. Man erhält dann

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$
$$= \frac{[x+dx)-x]\cdot[(x+dx)^{n-1}+(x+dx)^{n-2}x+\ldots+(x+dx)x^{n-2}+x^{n-1}]}{dx}$$
$$= \frac{dx}{dx}\cdot[(x+dx)^{n-1}+(x+dx)^{n-2}x+\ldots+(x+dx)x^{n-2}+x^{n-1}.$$

Man bildet schließlich, nachdem der Bruch durch Kürzen weggefallen ist, den reellen Teil des Terms und erhält

$$RT\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$
$$= RT((x+dx)^{n-1}+(x+dx)^{n-2}x+\ldots+(x+dx)x^{n-2}+x^{n-1})$$
$$= x^{n-1}+x^{n-2}x+\ldots+xx^{n-2}+x^{n-1} \quad (n \text{ Summanden})$$
$$= nx^{n-1}.$$

Die Regel wird also mit Hilfe der hyperreellen Zahlenwelt einfach errechnet. Das Errechnen von Identitäts-, Konstanten-, Summen- und Faktorregel sei nun dem Leser selbst überlassen.

Insbesondere bei der Herleitung der Kettenregel erweist sich die Rechnung mit Differentialen als entscheidender Vorteil.

Sei h: $D_1 \to W_1$ eine reelle Funktion und

sei g: $D_2 \to W_2$ eine reelle Funktion, es gelte $W_1 \subseteq D_2$.

Die Funktionen h und g seien beide differenzierbar. Dann gilt für die Funktion f mit

$$f\colon D_1 \to W_2, \quad f(x) = g(h(x)):$$

$$f'(x) = h'(x)\cdot g'(h(x)).$$

Beweis: Sei $dx \neq 0$ eine beliebige Infinitesimalzahl.

Zur Vereinfachung schreibe man

$$z := h(x),\ dz := h(x+dx) - h(x) \quad \text{sowie}$$
$$y := f(x),\ dy := f(x+dx) - f(x)$$
$$= g(h(x+dx)) - g(h(x)) = g(z+dz) - g(z).$$

Gesucht ist $RT\left(\frac{dy}{dx}\right)$ für $dx \neq 0$ infinitesimal.

Erweitern des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ mit dz, $dz \neq 0$, ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Das Differential dz muß aber mittels der Funktion h aus dx bestimmt werden. Weil h differenzierbar ist, ist dz zwar eine Infinitesimalzahl, es könnte aber $dz = 0$ auftreten. Deshalb sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $dz \neq 0$:

Dann existieren nach Voraussetzung die reellen Teile $RT\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $RT\left(\frac{dy}{dz}\right)$ und es ergibt sich sofort:

$$f'(x) = RT\left(\frac{dy}{dx}\right) = RT\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right) = RT\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot RT\left(\frac{dz}{dx}\right)$$
$$= g'(h(x))\cdot h'(x)$$

2.Fall: Aus $dz = 0$ folgt nun $h(x+dx) = h(x)$ und damit $dy = 0$. Es gilt also mit

$$h'(x) = RT\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad \text{auch} \quad f'(x) = RT\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

formal also auch $f'(x) = g'(h(x))\cdot h'(x)$.

Die Betrachtung des Sonderfalls $dz = 0$ reduziert sich gegenüber der Grenzwert-Analysis also ganz wesentlich.

Auch bei der Herleitung der Produktregel wird der Vorteil, mit hyperreellen Zahlen zu rechnen, deutlich. Deshalb seien im Folgenden die entsprechenden Wege nach Grenzwert-Analysis und Infinitesimal-Analysis einander gegenübergestellt.

Kontaktanschrift der Verfasser:

StD Helmut Wunderling, Dahlemer Weg 84, 14167 Berlin