Neues zum Analysisunterricht in Grundkursen — Teil 2

Integrieren / Differenzieren in Klasse 11

Vorwort

Der vorliegende 2. Teil setzt den Vorschlag fort, wie Lehrerinnen oder Lehrer ihren Unterricht aufbauen können, um den behördlichen Vorgaben — kein Grenzwertbegriff — so zu entsprechen, dass ihre Schülerinnen und Schüler fundierte Vorstellungen entwickeln können, die für die Differenzialrechnung tragfähig sind. Er beginnt aber unabhängig vom ersten Teil und geht von einer Fragestellung aus der Praxis aus. Die Integralrechnung steht dabei im Vordergrund.

Stunde 1: CO_2 – Gehalt in Teichen

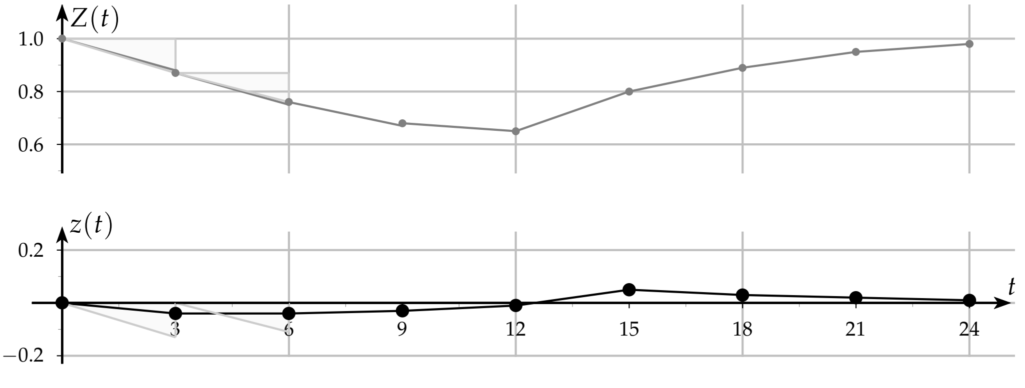
Die biologische Aktivität in einem Teich kann man durch die Änderungsrate beschreiben, mit der CO_2 dem Wasser zugefügt oder entnommen wird. Pflanzen entnehmen tagsüber dem Wasser im Rahmen der Photosynthese CO_2 und geben nachts CO_2 ab. Tiere geben durch die Atmung CO_2 an das Wasser ab.
Bei Tagesanbruch werden 1,000 ME CO_2 im Teich festgestellt. (ME steht hier für eine **M**engen**E**inheit, in der die Stoffmenge von CO_2 gemessen werden kann.) Biologen haben die Zu- und Abnahmerate $z(t)$ über einen ganzen Tag, beginnend mit dem Sonnenaufgang, gemessen. Die Werte werden in der Einheit ME pro Stunde angegeben.

Zeit t in h	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$z(t)$ in ME/h	0,0	-0,042	-0,037	-0,026	-0,009	0,046	0,031	0,019	0,006

In den ersten 12 Stunden nach Sonnenaufgang wird eine Abnahme an CO_2 gemessen, das bedeuten die negativen Werte der Änderungsrate. In der nächtlichen Tageshälfte steigt der CO_2-Gehalt des Wassers wieder, es müssen also Pflanzen im Teich vorhanden sein.
Im Text wurde nicht angegeben, wie die Biologen gemessen haben. Die einfachste Annahme ist, dass sie im Abstand von 3 Stunden jeweils die CO_2-Menge $Z(t)$ gemessen haben.

Zeit t in h	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$Z(t)$ in ME	1,000	0,874	0,763	0,685	0,658	0,796	0,889	0,946	0,964

Der Messung bei Sonnenaufgang — $t = 0$ h — haben sie willkürlich den Wert 1,000 ME gegeben und darauf alle weiteren Messungen bezogen, so dass diese als Prozentangaben bzgl. des Anfangswertes gelesen werden können.
Hieraus ergibt sich der Streckenzug im oberen Teil der folgenden Abbildung, der die im Teich gemessenen unterschiedlichen CO_2-Mengen $Z(t)$ mit einander verbindet. Er gibt einen groben Überblick darüber, wie sich der CO_2-Gehalt im Teich an diesem Tag geändert hat.
Warum ist diese Messwertetabelle nicht in der Aufgabenstellung angegeben? Weil sie keinen einfachen Vergleich mit einer anderen Messreihe in einem anderen Teich in einem anderen zeitlichen Abstand möglich macht. Es wäre nämlich ganz so wie bei einer Autofahrt, wenn das Fahrzeug um 12 Uhr bei Kilometer 658, um 15 Uhr bei Kilometer 796 usw. bis es um 24 Uhr bei Kilometer 964 ankommt. Keine Verkehrsüberwachung käme damit klar, ob das Auto bei Kilometer 700 die Geschwindigkeitsbegrenzung auf 30 km/h eingehalten hat oder nicht. Erst die Normierung auf eine Stunde macht die Vergleiche möglich und der Begriff der *Geschwindigkeit* (mit der sich der CO_2-Gehalt ändert) ist daher jedem geläufig.
Beide Tabellen beschreiben also das Änderungsverhalten des CO_2-Gehalts im Teich, jedoch für unterschiedliche Zielsetzungen. Will man unterschiedliche Messreihen miteinander vergleichen, so ist die $z(t)$-Tabelle bzw. die untere Punktreihe besser geeignet. Will man eine Übersicht über die jeweilige CO_2-Menge haben, so bietet die $Z(t)$-Tabelle bzw. die obere Punktreihe genau diese Information.



Im vorliegenden Fall ist nur die untere Punktreihe gegeben, welche die (auf eine Stunde normierte) Änderungsrate im 3-Stunden-Rhythmus angibt. Aufgabe ist es, daraus die eigentliche Messreihe zu rekonstruieren.

Im Zeitraum zwischen 0 h und 3 h war die Änderungsrate wegen fehlender Zwischeninformationen stets $z(3\ \mathrm{h}) = -0,042\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{h}}$ oder $z(3\ \mathrm{h}) = -0,042 \cdot 3\frac{\mathrm{ME}}{3\ \mathrm{h}}$.
Nach drei Stunden ist also der CO_2-Gehalt um $0,126\,\mathrm{ME} = 3 \cdot 0,042\,\mathrm{ME}$ gefallen. Das Dreieck mit den Kathetenlängen $-0,126$ ME und 3 h veranschaulicht diese Änderung. Allerdings gehört es in die obere Zeichnung, weil der Prozess bei $1,000$ ME beginnt und nach 3 Stunden bei $0,874$ ME $(= (1,000 - 0,126)$ ME) endet.

Im nächsten Zeitintervall gilt entsprechend $z(6\,\mathrm{h}) = -0,037\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{h}} = \frac{-0{,}111\,\mathrm{ME}}{3\,\mathrm{h}}$.
In diesen drei Stunden ist der CO_2-Gehalt um weitere $0,111$ ME gesunken. Das zweite Dreieck mit den Kathetenlängen $-0,111$ ME und 3 h veranschaulicht diese zweite Änderung. Es gehört natürlich auch in die obere Zeichnung, wo es den Prozess in der Zeitspanne von 3 bis 6 Stunden veranschaulicht: er beginnt zur 3. Stunde bei $0,874$ ME und endet zur 6. Stunde mit dem CO_2-Gehalt $Z(6\,\mathrm{h})$ von $0,763$ ME.

Aufgabe:
a) Bestimmen Sie aus den gegebenen Werten $z(t)$ alle 8 Steigungsdreiecke für $Z(t)$ und fügen Sie diese so zusammen, dass der obere Streckenzug entsteht.
b) Berechnen Sie alle 8 Werte $Z(t)$ und vergleichen Sie mit der Tabelle für $Z(t)$.

Wie sieht die zugehörige algebraische Rechnung aus?
Den Zusammenhang zwischen den Funktionen z und Z liefert die Definition von Änderungsraten:

$$z(t) = \frac{Z(t) - Z(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

In dieser Form geschrieben erkennt man sofort, dass zur Berechnung des CO_2-Gehalts $Z(t)$ nicht nur die Änderungsrate $z(t)$ zur selben Zeit t bekannt sein muss sondern auch der Gehalt $Z(t - \Delta t)$ beim Schritt zuvor.
Im vorliegenden Fall ist $\Delta t = 3\,\mathrm{h}$ zu wählen, weil die Messungen in diesen Abständen erfolgten und dazwischen keine Kenntnisse vorhanden sind.

$$\text{Aus} \quad z(t) = \frac{Z(t) - Z(t - 3\,\mathrm{h})}{3\,\mathrm{h}} \quad \text{folgt dann}$$
$$Z(t) = Z(t - 3\ \mathrm{h}) + z(t) \cdot 3\,\mathrm{h}.$$

Der einzige bekannte CO_2-Gehalt ist zunächst nur $Z(0\,\mathrm{h}) = 1,000\,\mathrm{ME}$.

Daraus lässt sich $Z(3\,\mathrm{h}) = Z(0\,\mathrm{h}) + z(3\,\mathrm{h}) \cdot 3\,\mathrm{h}$ berechnen
und anschließend $Z(6\,\mathrm{h}) = Z(3\,\mathrm{h}) + z(6\,\mathrm{h}) \cdot 3\,\mathrm{h}$.
Ohne $Z(3\,\mathrm{h})$ explizit ausrechnen zu müssen ergibt sich

$$\begin{aligned} Z(6\,\mathrm{h}) &= (Z(0\,\mathrm{h}) + z(3\,\mathrm{h}) \cdot 3\,\mathrm{h}) + z(6\,\mathrm{h}) \cdot 3\,\mathrm{h} \\ &= Z(0\,\mathrm{h}) + (z(3\,\mathrm{h}) + z(6\,\mathrm{h})) \cdot 3\,\mathrm{h}, \end{aligned}$$

bzw. mit den gegebenen Werten:

$$Z(6\,\mathrm{h}) = 1,000\,\mathrm{ME} + (-0,042 - 0,037)\,\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{h}} \cdot 3\,\mathrm{h} = 0,763\,\mathrm{ME}.$$

Ohne die Maßeinheiten hinzuschreiben sieht die Berechnung von $Z(24)$ wie folgt aus:

$$\begin{aligned} Z(24) &= Z(8 \cdot 3) = Z(0) + \Big(z(1 \cdot 3) + z(2 \cdot 3) \\ &\qquad + z(3 \cdot 3) + \ldots + z(7 \cdot 3) + z(8 \cdot 3)\Big) \cdot 3\,. \end{aligned}$$

Weil die Summe der 8 Änderungsraten zu viel Platz einnimmt, kürzt man sie mit dem Summenzeichen $\sum_{i=1}^{8} z(i \cdot 3)$ ab.
Frage: Welche Bedeutung hat die Gleichung

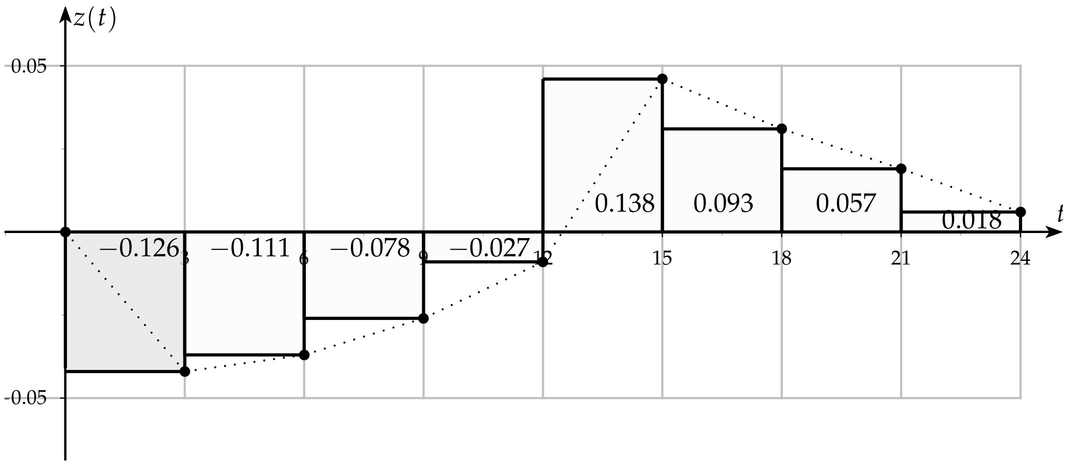
$$Z(24) - Z(0) = \sum_{i=1}^{8} z(i \cdot 3) \cdot 3.$$

Kommentar

Das Beispiel mit dem Teich findet sich in „HR_Integralrechnung_2009“ des Lisum Berlin-Brandenburg. Der Umgang damit ist dort jedoch völlig anders, weil Integrale dort bereits vorausgesetzt werden, die allerdings bei diskreten Daten fehl am Platze sind. Als Einstieg zur Problematik der Rekonstruktion ist es jedoch hervorragend geeignet, weil diese vollkommen gelingt.

Stunde 2: Deutung der Summanden als Inhalte von Rechtecken

Die Summe aus der 1. Stunde besteht aus 8 Summanden. Jeder von ihnen ist das Produkt aus einer Änderungsrate und der Zeitdifferenz zweier Messdatenerhebungen. Diese Produkte sind bei der Auflösung der Definition einer Änderungsrate $z(t)$ nach dem Wert $Z(t)$ der Funktion entstanden, welche die Änderungsraten ergeben hat.



Produkte lassen sich geometrisch als Rechtecke veranschaulichen, denn deren Flächeninhalt ist ja gerade das Produkt zweier Seitenlängen. In der Abbildung sind alle 8 Rechtecke eingezeichnet, deren Höhe ein Messdatum $z(i \cdot 3)$, also die Ordinate des Messpunkts Nr. i, und deren Breite 3 (Stunden) beträgt. Der Flächeninhalt ist jeweils angegeben; seine Maßeinheit ist ME, nämlich (ME/h)·h. Der Wert ist negativ, wenn der CO_2Gehalt sinkt und positiv, wenn er steigt. Die Rechtecke liegen entsprechend unter- bzw. oberhalb der t-Achse.

Diese Umdeutung der Produkte lässt einen Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $z: \ t \longmapsto z(t)$ und $Z: \ t \longmapsto Z(t)$ erkennen, der es Wert ist, verallgemeinert zu werden. z beschreibt die Änderungsraten, die Z liefert, ist also die Ableitung von Z. Allgemein geschrieben handelt es sich um f' und f; der Vorgang $f \longrightarrow f'$ wird Differenzieren genannt. Nunmehr wird die Umkehrung $f' \longrightarrow f$ betrachtet.

Es ist üblich, die Ausgangsfunktion mit „f“ zu bezeichnen, daher wählt man in diesem Fall für die Zielfunktion den Großbuchstaben „F“ als *Stammfunktion* von f. Den Vorgang $f \longrightarrow F$ kann man als Rückwärts-Differenzieren bezeichnen.

In der nächsten Abbildung ist unten der Graf zu f eingezeichnet. Die Funktionsgleichung

$$f(x) = (-x^3 + 37 \cdot x^2 - 309 \cdot x)/20000$$

ermöglicht es, in Dreierabständen auf der x-Achse Kurvenpunkte zu wählen, die mit den Messpunkten der CO_2-Aufgabe aus Stunde 1 ungefähr übereinstimmen. Wie zuvor mit den echten Messdaten wurden die Rechtecke mit Breite 3 eingetragen und deren Flächeninhalte ganz unten aufgelistet. Bei Punkt A beginnend, wurden diese Werte nacheinander als Ab- bzw. als Zunahme der Funktionswerte der Funktion F gedeutet und ergaben die Punkte $P1$ bis $P8$. Diese Punkte zeigen auch das Ab und Auf der CO_2-Menge im Teich, aber ....

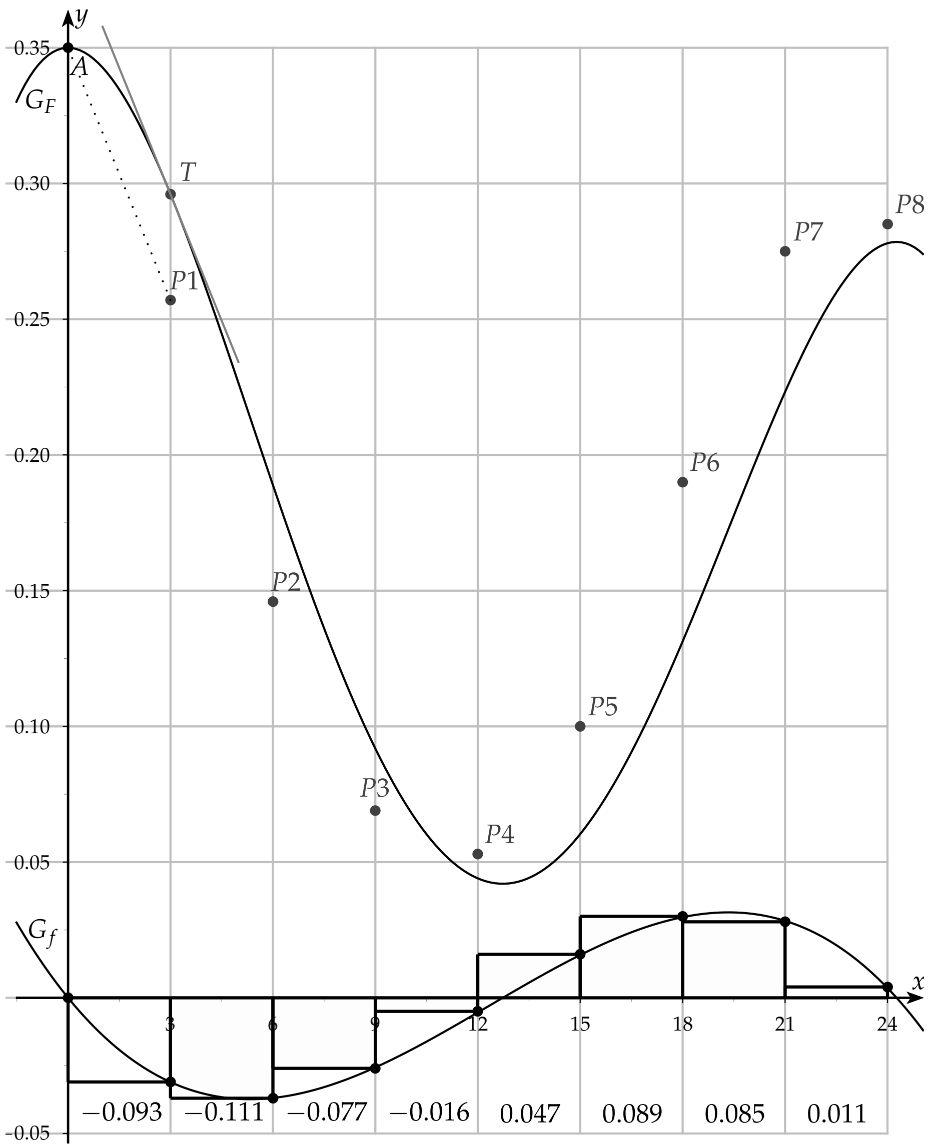
Glücklicherweise kann man kontrollieren, ob die Übertragung der ursprünglichen Aufgabe mit diskreten Änderungsraten auf den Fall jetzt mit kontinuierlichen Änderungsraten (aus denen lediglich 8 „Messungen“ ausgewählt wurden) stimmig ist oder nicht.

Dazu differenzieren wir die Funktion f rückwärts und erhalten[1]

$$F(x) = (-\frac{1}{4}x^4 + \frac{37}{3}x^3 - \frac{309}{2}x^2)/20000 + 0,35.$$

Das Ergebnis ist ernüchternd! Keiner der Punkte $P1$ bis $P8$ liegt auf G_F. Woran liegt das?

[1] Der Summand 0,35 sorgt dafür, dass der Graph durch Punkt A verläuft.



Im ersten (diskreten) Fall waren die Messpunkte aus der Änderung des CO_2-Gehalts innerhalb von jeweils drei Stunden bestimmt worden. Auf welche Weise diese Änderungen zustande kamen, war nicht bekannt und daher wurden die Daten jeweils als mittlere Änderungsrate (Sekantensteigung) interpretiert, so dass sich Steigungsdreiecke bzw. Rechtecke ergaben, die die Rekonstruktion erfolgreich durchführen ließen.

Im zweiten Fall sind die lokalen Änderungsraten $f(x)$ gegeben, aber wie mittlere Raten behandelt worden. In der Abbildung sind der Punkt T auf G_F und die zugehörige Tangente gezeichnet. Deren Steigung, die von f geliefert wird, ist völlig anders als die Steigung der Sekante AT. Kein Wunder dass $P1$ nicht auf T liegt. Sollten die Biologen ein Messgerät benutzt haben, das kontinuierlich Änderungsraten aufzeichnen kann, und somit eine Kurve analog zu G_f zur Verfügung gehabt haben, aus der sie alle drei Stunden die Werte abgelesen und in die Ausgangstabelle übermittelt haben, dann wäre auch dort die Rekonstruktion des Verlaufs der CO_2-Menge auf diese Weise fehlgeschlagen.

Kommentar

Die Rekonstruktionsaufgabe aus Sekantensteigungen ist gelöst, nicht aber bei Vorgabe von Tangentensteigungen. Aus diesem Spannungsverhältnis lässt sich genügend Motivation ableiten, um als Ausweg eine tragfähige Methode für die ganze Analysis kennenzulernen.

Stunde 3: Uralte Ideen zur Bewältigung des Problems

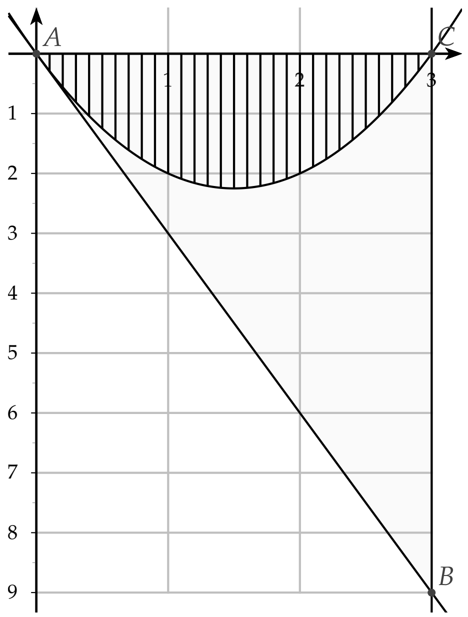
Seit die Menschen begonnen hatten, sich mit gekrümmten Objekten zu beschäftigen und sich deren Berechnung zugewandt hatten, stießen sie auf das Problem, dass die Methoden, die sie für eckige Objekte erfolgreich entwickelt hatten, nicht mehr funktionierten, wenn echte Kurven, also ohne jede Ecke, betrachtet werden sollten. Sekantensteigungen für einen Streckenzug zu bestimmen ist einfach, Tangentensteigungen für eine echte Kurve zu finden hingegen nicht. Flächeninhalte von Dreiecken oder Vielecken zu berechnen gelingt einfach, dasselbe Vorhaben bei Figuren mit gekrümmten Begrenzungen scheitert.

ARCHIMEDES — vor gut 2000 Jahren — war der erste, der es fertigbrachte, den Inhalt eines Parabelsegments zu berechnen, einer geschlossenen Figur, die von einer Strecke und einem Parabelbogen begrenzt wird. Er verglich dazu diese Figur mit einem Dreieck, dessen Flächeninhalt natürlich schon berechnet werden konnte, und zwar Strecke für Strecke, die man sich durch paralleles Verschieben zum Ausfüllen des Parabelsegments bzw. des Dreiecks vorstellen sollte. Er kam zu dem richtigen Ergebnis, aber nur durch die mutige Entscheidung, sich durch die „unendlich vielen“ Strecken nicht abschrecken zu lassen. Kein Mathematiker seiner Zeit hätte ihm eine solche Vorgehensweise abgenommen, denn dieses *Unendliche* ist kein Begriff, der in der Welt existiert, so der einflussreiche Philosoph ARISTOTELES. Deswegen hat ARCHIMEDES sein erstaunliches Ergebnis offiziell mitgeteilt, indem er die Strecken durch endlich viele Streifen ersetzte und mit ihnen bewies, dass sein Ergebnis stimmt, weil der Flächeninhalt weder kleiner noch größer sein kann. Privat aber hat er einem Freund in Alexandria seine eigentliche Methode verraten, ohne die er das Ergebnis nie gefunden hätte und also auch nicht hätte beweisen können. Bei der Zerstörung der berühmten Bibliothek von Alexandria kam auch seine Methodenschrift abhanden. Keiner der späteren Mathematiker erfuhr davon[2]. Über 1000 Jahre später tauchten Gedanken an unendlich viele Objekte wieder auf, diesmal zunächst in Form von Summanden. Sie wurden auch geometrisch zur Berechnung von Flächeninhalten krummlinig begrenzter Figuren benutzt. LEIBNIZ hat solche Summationen aus der Vorstellung von unendlich vielen unendlich dünnen Streifen heraus erfolgreich durchgeführt.

Mit der LEIBNIZ-Methode soll daher das Ergebnis des ARCHIMEDES,

Das Parabelsegment ist ein Drittel des Tangentendreiecks,

für die spezielle Parabel zu $p(x) = x(x-3)$ im Intervall $[0\,;\,3]$ berechnet werden.



Den Flächeninhalt des Tangentendreiecks[3] ABC kann man ablesen, er beträgt $\frac{27}{2}$ Flächeneinheiten. Zu erwarten ist also für das Segment $\frac{9}{2}$ Flächeneinheiten, allerdings mit negativem Vorzeichen, weil alle Strecken unterhalb der x-Achse verlaufen.

Für die Parabel gilt die Gleichung $p(x) = x(x-3)$, damit sie wie in der Abbildung die x-Achse bei 0 und 3 schneidet. Nun wird festgelegt, wie „breit“ die unendlich dünnen Streifen sein sollen. Wenn alle dieselbe „Dünne“ erhalten sollen, braucht man nur eine unendlich große Anzahl N vorzugeben und die Länge der Strecke $\overline{AC}$ dadurch zu dividieren. Die daraus erhaltene unendlich kleine Streifenbreite ist die Differenz der jeweils begrenzenden x-Werte; deshalb wählte LEIBNIZ die Bezeichnung dx. Die Wahl des Kleinbuchstaben d soll als Hinweis verstanden werden, dass dx unendlich klein ist, oder (lateinisch) *infinitesimal*. Er vermeidet in diesem Zusammenhang auch das Wort „Differenz“ und wählt das neue Wort *Differenzial*.

Weil $\overline{AC}$ 3 (Einheiten) lang ist, errechnet sich die infinitesimale Breite jedes der unendlich vielen Streifen als Differenzial

$$dx = \frac{3}{N}, \quad \text{d. h. es gilt auch} \quad N \cdot dx = 3.$$

[2] Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde zufällig eine Abschrift der ARCHIMEDES-Methode in einem alten Kloster aufgefunden. Mönche hatten die wertvolle Papyrusrolle für ihre Gebetstexte benutzt. Der mathematische Text darunter konnte glücklicherweise entziffert werden.

[3] AB ist die Parabeltangente in A.

Die Streifen sollen alle dicht nebeneinanderliegen.
Der 1. Streifen beginnt also links bei $x = 0$ und endet bei $x = 1 \cdot dx$.
Der 2. Streifen beginnt links bei $x = 1 \cdot dx$ und endet bei $x = 2 \cdot dx$, usw. .
Der letzte Streifen beginnt bei $x = (N-1) \cdot dx$ und endet bei $x = N \cdot dx$, d. h. bei $x = 3$.

Jeder Streifen mit der Laufnummer i, $i = 1 \ldots N$, besitzt einen infinitesimalen Flächeninhalt a_i. Da man sich die Streifen am einfachsten als hauchdünne Rechtecke vorstellen kann, berechnet sich jedes a_i als „Länge mal Breite“. Hierbei steht die Breite als dx bereits fest. Die Länge muss der jeweilige Funktionswert $p(x_i)$ sein, damit das Parabelsegment vollkommen ausgefüllt wird. Somit gilt

$$a_i = p(x_i) \cdot dx = x_i(x_i - 3) \cdot dx \text{ mit } x_i = i \cdot dx \text{ für } i = 1, \cdots, N.$$

Der gesuchte Flächeninhalt PS des Parabelsegments sollte dann die Summe aller N Streifeninhalte $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i$ sein. Diese Summe muss nun berechnet werden[4].

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} a_i &= \sum_{i=1}^{N} \Big((i \cdot dx)^2 - 3(i \cdot dx) \Big) dx \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{N} i^2 \Big) (dx)^3 - 3 \Big(\sum_{i=1}^{N} i \Big) (dx)^2 \\
&= \frac{1}{6} N \cdot (N+1)(2N+1)(dx)^3 - \frac{3}{2} N \cdot (N+1)(dx)^2 \\
&= \frac{1}{6} \Big(2N^3 (dx)^3 + 3N^2 (dx)^3 + N(dx)^3 \Big) \\
&\quad - \frac{3}{2} \Big(N^2 (dx)^2 + N(dx)^2 \Big) \\
&= \frac{1}{6} \Big(2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 dx + 3(dx)^2 \Big) - \frac{3}{2} \Big(3^2 + 3dx \Big) \\
&= \frac{3}{2} \Big(6 - 9 \Big) + \frac{1}{2} (dx)^2 \quad = \quad -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} (dx)^2
\end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass die Streifeninhalte *nicht* das Archimedische Ergebnis $-\frac{9}{2}$ liefern. Aber der Unterschied $\frac{1}{2}(dx)^2$ dazu ist unendlich klein, „verschwindend“ klein.

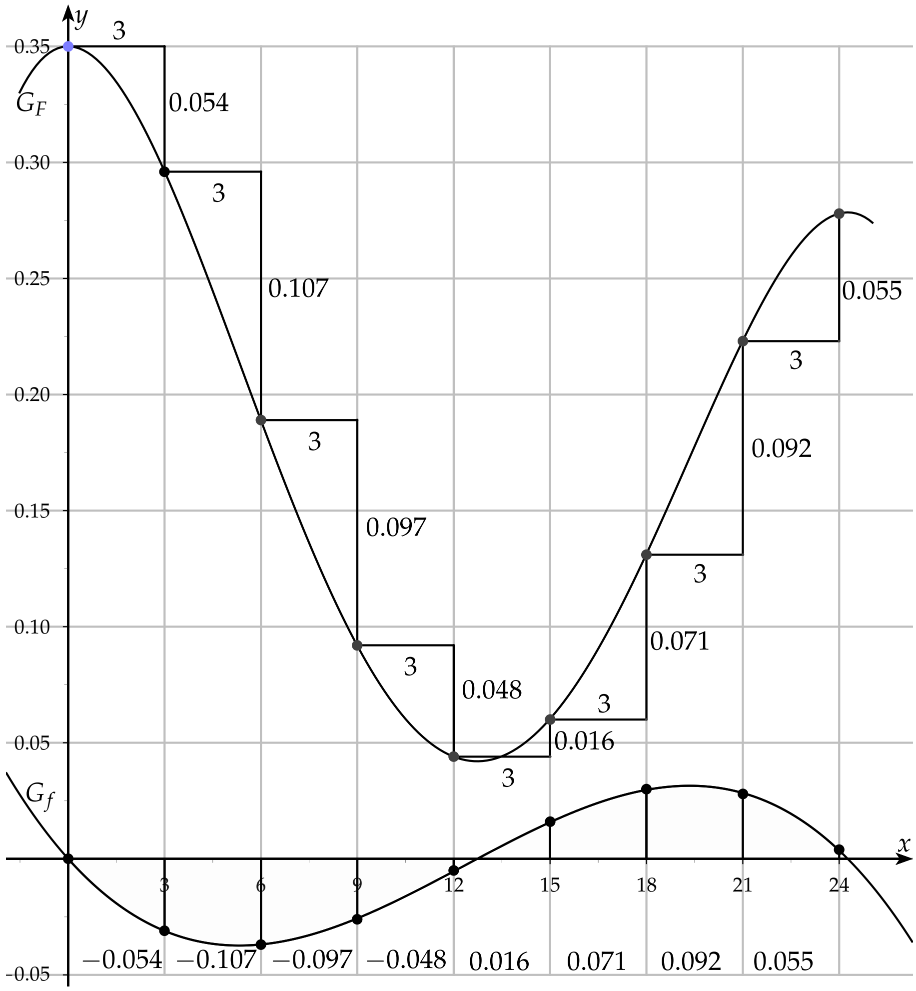
Wie beim Differenzieren lässt LEIBNIZ solch infinitesimale Unterschiede stets fort und hat damit seine Ergebnisse in der Differenzial- und Integralrechnung erhalten. Um auch mit der Schreibweise auszudrücken, dass dieser Vorgang des Fortlassens stattgefunden hat, benutzt er statt der Summenschreibweise $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i = \sum\limits_{i=1}^{N} p(x_i) dx$ das stilisierte Summenzeichen $\int$ und spricht statt von einer *Summe* von einem *Integral*. Das Ergebnis PS von ARCHIMEDES schreibt sich als Integral wie folgt:

$$PS = \int\limits_{0}^{3} p(x)\, dx = -\frac{9}{2}.$$

Kommentar

Die Betrachtung einer historischen Aufgabe bringt den Vorteil, dass das Resultat bekannt ist. Dadurch besitzt man einen Test für die Brauchbarkeit einer neuen Methode. Die intuitive LEIBNIZ-Integration kann arbeitsteilig erfolgen. Zwei Summen parallel zu verarbeiten ist didaktisch günstiger als mit (zu) einfachen Funktionstermen zu beginnen. Die Betrachtung immer besserer Ergebnisse mittels immer schmalerer Rechtecke (Ober- bzw. Untersummen) ist überflüssig, wenn man den Grenzwertbegriff nicht benutzen will oder darf.

[4] Die dafür benötigten Formeln der Summe der natürlichen Zahlen $1 + 2 + 3 + \cdots + N = \frac{1}{2} N \cdot (N+1)$ und die der Quadratzahlen $1 + 4 + 9 + \cdots + N^2 = \frac{1}{6} N \cdot (N+1)(2N+1)$ finden sich in Formelsammlungen oder im Internet.



Stunde 4: CO_2-Gehalt in Teichen und Integration

$$\text{Die Gleichung} \qquad f(x) = \frac{1}{20000}(-x^3 + 37 \cdot x^2 - 309 \cdot x)$$

beschreibt die Änderungsraten des CO_2-Gehalts im Teich für 24 Stunden. In Stunde 2 wurden die im 3 Stundenrhythmus herausgegriffenen Werte $f(x)$ benutzt, um mittels Flächeninhalten der entsprechenden Rechtecke die Stammfunktion F zu rekonstruieren, deren Graph durch $(0; 0,35)$ verläuft. Dieser Versuch war erfolglos, weil die gewählte Rechteckmethode nur für mittlere, nicht aber für momentane Änderungsraten anwendbar ist. Die Entwicklung der momentanen Änderungsrate innerhalb eines dreistündigen Abschnitts war nicht berücksichtigt worden.

Die Integrationsmethode von Leibniz erlaubt es aber, einen Flächeninhalt zu berechnen, der dem Verlauf des Graphen G_f folgt. Damit sollte die Rekonstruktion der Funktion F gelingen. Statt der Funktion p zum Archimedischen Parabelsegment wird nun die Funktion f der Änderungsraten herangezogen und zunächst für den ersten Zeitraum das Integral berechnet:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{1}{20000}(-x^3 + 37 \cdot x^2 - 309 \cdot x)\,dx.$$

Mit derselben Bedeutung des Differenzials dx wie zuvor muss zunächst die infinite Summe bestimmt werden[5]:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} f(i\cdot dx)dx &= \frac{1}{20000}\sum_{i=1}^{N}\Big(-(i\cdot dx)^3+37(i\cdot dx)^2\\
&\quad -309(i\cdot dx)\Big)dx\\
20000\sum_{i=1}^{N} f(i\cdot dx)dx &= -\Big(\sum_{i=1}^{N} i^3\Big)(dx)^4+37\Big(\sum_{i=1}^{N} i^2\Big)(dx)^3\\
&\quad -309\Big(\sum_{i=1}^{N} i\Big)(dx)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe:
Zeigen Sie, dass das Integral den (gerundeten) Wert $-0,054$ besitzt. Warum werden die Summanden $0,0008125\,dx^2-0,015525\,dx$ fortgelassen?
Versuchen Sie auch die übrigen 7 Integrale zu berechnen und vergleichen Sie mit den Werten unten in der Abbildung.
Diskutieren Sie anhand der Abbildung, ob die gewünschte Rekonstruktion gelungen ist.

Die Berechnung der Flächeninhalte $-0,107;\ldots;0,055$ für die folgenden Abschnitte ist aufwendiger. Für den zweiten Abschnitt z. B. muss die Summe $\sum\limits_{i=1}^{N} f(3+i\cdot dx)dx$ oder die Summe $\sum\limits_{i=N}^{2N} f(i\cdot dx)dx$ bestimmt werden. Hier ist ein CAS-Hilfsmittel hilfreich.

Eine einmalige Anstrengung ist hier günstiger. Das Integral $\int\limits_0^t f(x)\,dx$ mit der variablen Begrenzung t anstelle von 3 erfordert keinen größeren algebraischen Aufwand, aber anschließend kann die Ersetzung $t=3$ auch das schon bekannte Ergebnis $-0,054$ liefern.

Es muss aber ein jeweils passendes dx benutzt werden, also $dx=\frac{t}{N}$ anstelle von $dx=\frac{3}{N}$, denn die Streifen sollen insgesamt das Intervall $[0;t]$ ausfüllen. Mit diesem dx ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} f(i\cdot dx)dx &= \frac{1}{20000}\sum_{i=1}^{N}\Big(-(i\cdot dx)^3+37(i\cdot dx)^2\\
&\quad -309(i\cdot dx)\Big)dx
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
20000\sum_{i=1}^{N} f(i\cdot dx)dx &= -\Big(\sum_{i=1}^{N} i^3\Big)(dx)^4+37\Big(\sum_{i=1}^{N} i^2\Big)(dx)^3\\
&\quad -309\Big(\sum_{i=1}^{N} i\Big)(dx)^2\\
&= -\frac{N^2(N+1)^2}{4}(dx)^4\\
&\quad +\frac{37}{6}N(N+1)(2N+1)(dx)^3\\
&\quad -\frac{309}{2}N(N+1)(dx)^2\\
20000\sum_{i=1}^{N} f(i\cdot dx)dx &= -\frac{(\frac{t}{dx})^2(\frac{t}{dx}+1)^2}{4}(dx)^4\\
&\quad +\frac{37}{6}\frac{t}{dx}(\frac{t}{dx}+1)(2\frac{t}{dx}+1)(dx)^3\\
&\quad -\frac{309}{2}\frac{t}{dx}(\frac{t}{dx}+1)(dx)^2
\end{aligned}$$

[5] Zusätzlich braucht man die Formel $\sum\limits_{i=1}^{N} i^3=\frac{1}{4}N^2(N+1)^2$.

$$
\begin{aligned}
20000\sum_{i=1}^{N} f(i\cdot dx)dx &= -\frac{1}{12}t(t+dx) \\
&\quad \cdot(3t\,dx - 74dx + 3t^2 - 148t + 1854) \\
&= \frac{(dx)^2}{12}t(74-3t) \\
&\quad -\frac{dx}{2}t(t^2-37t+309) \\
&\quad -\frac{t^2}{12}(3t^2-148t+1854)
\end{aligned}
$$

Mit dx im letzten Term sind auch die beiden ersten Summanden infinitesimal und werden daher fortgelassen. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
20000\int_0^t f(x)\,dx &= \int_0^t (-x^3 + 37\cdot x^2 - 309\cdot x)\,dx \\
&= -\frac{1}{4}t^4 + \frac{37}{3}t^3 - \frac{309}{2}t^2\,.
\end{aligned}
$$

Der Flächeninhalt des 1. Abschnitts errechnet sich damit als

$$
\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{20000}\Big(-\frac{1}{4}3^4 + \frac{37}{3}3^3 - \frac{309}{2}3^2\Big) \approx -0,054\,.
$$

Der Flächeninhalt des 2. (und jedes weiteren) Abschnitts errechnet sich folgendermaßen:

$$
\int_3^6 f(x)\,dx = \int_0^6 f(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx \approx -0,107 \qquad \text{usw.}\,.
$$

Das Integral mit oberer Grenze t liefert den Term der Gleichung für eine Funktion, deren Graph durch den Ursprung verläuft. Der Graph G_F zur CO_2 Aufgabe soll durch $(0\,;\,0,35)$ verlaufen. Eine Verschiebung in Richtung y-Achse um $0,35$ leistet die Anpassung. Die Lösung für die Kurve des CO_2-Anteils im Teich über 24 Stunden lautet daher

$$
F(x) = \frac{1}{20000}\Big(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{37}{3}x^3 - \frac{309}{2}x^2\Big) + 0,35\,.
$$

Aufgabe:
Bilden Sie die Ableitung $F'(x)$. Was bedeutet das Ergebnis bzgl. der Konstanten $0,35$?

Das Integral mit oberer Grenze t ergibt also einen Term, der bestätigt, dass diese Art von Integration tatsächlich Rückwärtsdifferenzieren ist. Es ist also nicht zu erwarten, dass der „richtige" konstante Summand geliefert wird, da dieser ja beim Differenzieren zu null wird. Differenzieren lässt sich deshalb gar nicht eindeutig umkehren.

Um dem Umstand Rechnung zu tragen, dass das Ergebnis wegen fehlender Konstanten unbestimmt bleibt, schreibt man das Integralzeichen ohne die Grenzen 0 und t und vermeidet die Variable t überhaupt, weil im allgemeinen der Buchstabe x für Funktionsgleichungen die erste Wahl ist.

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{1}{20000}\Big(-x^3 + 37\cdot x^2 - 309\cdot x\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{20000}\Big(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{37}{3}x^3 - \frac{309}{2}x^2\Big) + c\,.
\end{aligned}
$$

Indem man einen allein vom Integrieren her nicht bestimmbaren konstanten Summanden als „$+c$" hinzufügt, erinnert man daran, dass $\int f(x)\,dx$ ein *unbestimmtes Integral* ist, ganz im Gegensatz zum *bestimmten Integral* $\int_3^6 f(x)\,dx$, das den Wert eines Flächeninhalts zwischen Kurve und x-Achse bestimmt.

Kommentar

Mit den bisher beschriebenen intuitiven Vorstellungen ließe sich notfalls ein Analysisunterricht in Grundkursen bestreiten. Jeder Start über eine Aufgabe aus der „Praxis" erfordert aber mindestens noch ein systematisches Sichten.

Stunde 5: Über unendlich große Anzahlen

In Stunde 3 wurde einfach vorausgesetzt, dass es infinite Anzahlen N gibt. Damit wurde der Flächeninhalt eines Parabelsegments bestimmt, der von ARCHIMEDES vor mehr als 2000 Jahren gefunden wurde. Die LEIBNIZ-Methode lieferte erfolgreich das bekannte Ergebnis.

Dass es infinite hyperreelle Zahlen überhaupt gibt, lässt sich aus der Forderung nach einer infinitesimalen Zahl α leicht folgern: der Kehrwert jeder infinitesimalen Zahl ist infinit. Aber genau so wie nur die natürlichen Zahlen n aus der Menge der reellen Zahlen eine Anzahl angeben können und damit die Summenformeln wie z. B. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ ihren Sinn bekommen, so muss es auch *hypernatürlich infinite Zahlen* N unter den infiniten hyperreellen Zahlen geben.

Die natürlichen Zahlen werden im allgemeinen nicht explizit definiert, weil sie jeder vom Zählen her kennt. Was aber sind hypernatürliche Zahlen? Um dies zu erklären, folgt hier ein kleiner Exkurs darüber, wie die hyperrellen Zahlen überhaupt konstruiert werden können.

Das Vorbild: die Konstruktion der reellen Zahlen

Wohl in jedem Klassenzimmer kommt eine Intervallschachtelung zu $\sqrt{2}$ vor. Es gibt viele äquivalente Schachtelungen. Jede solcher Schachtelungen besteht prinzipiell aus einem Paar rationaler Zahlenfolgen — die der unteren Intervallenden und die der oberen. Jede Folge für sich genügt, um $\sqrt{2}$ zu definieren. Reelle Zahlen werden daher häufig auch mittels Folgen rationaler Zahlen erklärt, welche die Eigenschaft haben müssen, konvergent zu sein. Man nennt sie Cauchyfolgen. Andere Folgen werden nicht benutzt. Zwei Cauchyfolgen sind äquivalent, wenn ihre Differenzenfolge eine Nullfolge ist.

Jede reelle Zahl ist eine Äquivalenzklasse rationaler Cauchyfolgen.

Analoge Konstruktion der hyperreellen Zahlen

Jede hyperreelle Zahl ist eine Äquivalenzklasse reeller Zahlenfolgen.

Ein erster Unterschied wird hier schon sichtbar: eine spezielle Art von Folgen wie die der Cauchyfolgen wird NICHT gefordert. Nur so können zusätzlich zu den reellen Zahlen andere Zahlen erwartet werden. Denn würde man nur „rationale“ gegen „reelle“ Zahlen austauschen, sonst aber alles so lassen, dann ergäbe sich wieder nur der Körper der reellen Zahlen, der deswegen auch vollständig genannt wird.

Jede Folge reeller Zahlen ist also Ausgangsmaterial. Die Rechenarten mit den Folgen sind — wie bei den rationalen Cauchyfolgen auch — gliedweise definiert. Dadurch wird erreicht, dass sich sämtliche Rechenregeln der reellen Zahlen auf die neuen Objekte übertragen.

Der Hauptunterschied liegt jedoch darin, wie zwei äquivalente Folgen definiert sind. Zunächst werden die Folgen gliedweise verglichen. Stimmen sie überall überein, so sind sie identisch und natürlich äuivalent.
Stimmen sie fast überall, d. h. bis auf endlich viele Glieder, überein, so sollen sie wie im Vorbild ebenfalls äquivalent sein.

Der wesentliche Unterschied besteht nun darin, dass nicht nur auf endlich viele Abweichungen verzichtet wird, sondern dass auch unendlich viel Abweichungen irrelevant sein können. Die beiden Folgen müssen nur in *genügend vielen* Gliedern übereinstimmen.
Was bedeutet das?

Dazu ein Beispiel:

Gegeben sind vier reelle Zahlenfolgen (e),(n), (a) und (b):

$$\begin{array}{ll} (e) = (1;\ 1;\ 1;\ 1;\ \cdots) & (n) = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ \cdots) \\ (a) = (1;\ 0;\ 1;\ 0;\ \cdots) & (b) = (0;\ 1;\ 0;\ 1;\ \cdots) \end{array}$$

Die konstanten Folgen (e)und (n) stellen naturgemäß die hyperreelle 1 bzw. die 0 dar.

Die alternierenden Folgen (a)und (b) stellen auch zwei hyperreelle Zahlen a und b dar. Welche Zahlen sind das?

Rechnen mit hyperreellen Zahlen ist gliedweises Rechnen mit den Folgen. Daher muss $a + b = 1$ und $a \cdot b = 0$ gelten. Eine der beiden Zahlen muss also die Null sein und die andere im Gefolge die Eins. Welche der Zahlen

a und b welche Rolle spielt, ist gleichgültig. Wenn aber mit den neu geschaffenen Zahlen gerechnet werden soll, muss hier entschieden werden[6] .

Hier soll $a = 0$ und $b = 1$ gesetzt werden. Das muss auch dann erkannt werden, wenn man von dieser Setzung nichts weiß, d. h. wenn man die zugehörigen Folgen gliedweise vergleicht.

Die Glieder einer jeden Folge sitzen wie die Perlen einer Kette hintereinander, so dass man von ihrem ersten Glied, vom zweiten Glied, vom dritten . . . Glied reden kann. Sie werden also durchnummeriert, d.h. durch klein geschriebene natürliche Zahlen $_1$, $_2$, $_3$ usw. unterschieden: a_1, a_2, a_3.... Die für diese Aufgabe benutzten natürlichen Zahlen werden Indizes genannt (Singular: Index), die zugehörigen Teilmengen T natürlicher Zahlen heißen *Indexmengen*.

(a) und (n) unterscheiden sich in allen Gliedern mit ungeradem Index und stimmen für gerade Indizes stets überein. Für das gesamte Umgehen mit hyperreellen Zahlen dürfen also die ungeraden Indizes nie ausschlaggebend sein, während die geraden Indizes genügen, um zu entscheiden, ob zwei Folgen dieselbe Zahl oder zwei verschiedene Zahlen beschreiben.

Ein erster Test ist der Vergleich von b mit den anderen drei Zahlen. Sowohl $b = a$ als auch $b = 0$ kann nicht stimmen, wohl aber $b = 1$, das lehrt der jeweilige Vergleich der Glieder mit einem geraden Index.

Um diesen Sachverhalt auch allgemein griffig ausdrücken zu können, sagt man, eine Teilmenge T der Menge $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, aller natürlichen Indizes enthält *genügend viele Indizes*, wenn man mit ihr von zwei Folgen entscheiden darf und kann, ob sie zur selben hyperreellen Zahl gehören oder nicht. Selbstverständlich muss damit die Komplementärmenge $\mathbb{N}\backslash T$ stets *ungenügend viele Indizes* besitzen.

Es werden nun nicht etwa alle Teilmengen T von $\mathbb{N}$ und ihre Komplemente einzeln für genügend bzw. ungenügend viele bestimmt. Statt dessen wird gleich die ganze Menge aller Teilmengen in zwei Unterabteilungen aufgespalten gedacht. Diejenige Unterabteilung, welche aus den Mengen mit genügend vielen Indizes besteht, soll mit $\mathcal{U}$ bezeichnet werden. Dann können Sätze wie „T enthält genügend viele Indizes“ bzw. „S enthält ungenügend viele Indizes“ kurz in der Mengenschreibweise formuliert werden: „$T \in \mathcal{U}$ bzw. $S \notin \mathcal{U}$“.

Für Leser, die sich etwas genauer mit der Relation „genügend viel“ beschäftigen wollen, folgen nun die 6 Regeln für die Unterabteilung $\mathcal{U}$, die zum Beweis nötig sind, dass die Menge aller reeller Zahlenfolgen bzgl. ihrer Übereinstimmung für genügend viele Indizes in Äquivalenzklassen zerfällt. Jede solche Äquivalenzklasse ist eine hyperreelle Zahl.

1. *Die Menge aller Indizes* $\mathbb{N}$ *besitzt genügend viele Indizes.*

$$\mathbb{N} \in \mathcal{U}$$

Zwei Folgen, die gliedweise vollständig übereinstimmen, müssen dieselbe hyperreelle Zahl beschreiben.

2. *Keine endliche Teilmenge E von* $\mathbb{N}$ *kann genügend viele Indizes enthalten.*

$$\forall E \subset \mathbb{N} : E \text{ endlich} \Longrightarrow E \notin \mathcal{U}$$

Zwei Folgen, die nur bei endlich vielen Indizes gliedweise oder überhaupt nicht übereinstimmen, beschreiben niemals dieselbe hyperreelle Zahl.

3. *Besitzt eine Indexmenge T genügend viele Indizes, so besitzt ihre Komplementärmenge* $\mathbb{N}\backslash T$ *bestimmt nicht genügend viele Indizes.*

$$T \in \mathcal{U} \Longrightarrow \mathbb{N}\backslash T \notin \mathcal{U}$$

Hiermit werden Widersprüche wie „$0 = 1$“ ausgeschlossen.

4. *Besitzt eine Indexmenge T ungenügend viele Indizes, so besitzt ihre Komplementärmenge* $\mathbb{N}\backslash T$ *bestimmt genügend viele Indizes.*

$$T \notin \mathcal{U} \Longrightarrow \mathbb{N}\backslash T \in \mathcal{U}$$

Die Folge $(1\,;\,0\,;\,1\,;\,0\,;\,1\,;\,0\,;\,1\,;\;\ldots)$ z.B. könnte nicht benutzt werden, wenn sie weder die Null noch die Eins beschreiben darf.

5. *Bestehen zwei Teilmengen von* $\mathbb{N}$ *je aus genügend vielen Indizes, so besitzt auch ihr Durchschnitt genügend viele Indizes.*

$$T_1 \in \mathcal{U} \wedge T_2 \in \mathcal{U} \Longrightarrow T_1 \cap T_2 \in \mathcal{U}$$

Diese und die folgende Forderung garantieren die hyperreellen Zahlen als Äquivalenzklassen und ermöglichen, dass mittels gliedweisen Rechnens mit reellen Folgen die entsprechenden Rechnungen mit hyperreellen Zahlen erklärbar sind.

6. *Besitzt eine Indexmenge T genügend viele Indizes, so auch jede ihrer Obermengen S.*

$$T \in \mathcal{U} \wedge T \subseteq S \Longrightarrow S \in \mathcal{U}$$

Die Frage bleibt offen, ob es überhaupt eine vollständige Aufspaltung der Menge aller Teilmengen natürlicher Zahlen in zwei Unterabteilungen gibt, so dass die sechs Forderungen an $\mathcal{U}$ sämtlich erfüllt sind. Der Beweis dieser Tatsache ist für die Schule zu schwer.

Hypernatürliche Zahlen

Nachdem der Herstellungsprozess hyperreeller Zahlen bekannt ist, kann man leicht einsehen, dass besondere solcher Zahlen entstehen, wenn man spezielle reelle Zahlenfolgen, nämlich Folgen natürlicher Zahlen heranzieht.

[6] ROBINSON hat an dieser Stelle nicht aufgegeben, sondern die Entscheidung gewagt und dann gezeigt, dass man in allen solchen Fällen miteinander kompatible Entscheidungen findet.

Diese Zahlen werden *hypernatürlich* genannt und die Menge aller dieser Zahlen mit ${}^{\star}\mathbb{N}$ bezeichnet. Alle endlichen hypernatürlichen Zahlen unterscheiden sich nicht von den üblichen natürlichen Zahlen, denn ob z. B. die Zahl 3 oder die konstante Folge (3) betrachtet wird, macht keine wirkliche Unterscheidung nötig.

Anders sieht es aus, wenn man z. B. die Folge $(m) = (1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\quad \ldots)$ aller natürlichen Zahlen m betrachtet. Sie beschreibt selbstverständlich eine Zahl, sie soll mit Ω bezeichnet werden. Sie ist ein Beispiel einer *infiniten* hypernatürlichen Zahl. Vergleicht man sie nämlich mit irgendeiner finiten Zahl, z. B. der (3), so sind all ihre Glieder vom Index 4 ab größer als 3. Das aber sind genügend viel. Ω ist aus demselben Grunde größer als jede natürliche, also auch jede reelle Zahl.

Sie erbt aber von ihrer Folge die Eigenschaften einer üblichen natürlichen Zahl. Beispielsweise ist sie eine gerade Zahl, weil oben die Menge der geraden Indizes als genügend viel erklärt worden war und genau bei diesen Indizes stets eine gerade natürliche Zahl steht. Sie ist also durch 2 teilbar. Die gliedweise Division liefert denn auch $\frac{\Omega}{2} = (\frac{1}{2};\quad 1;\quad \frac{3}{2};\quad 2;\quad \ldots)$ — bei allen geraden Indizes stehen natürliche Zahlen und die übrigen Glieder spielen für die Bezeichnung „hypernatürlich" keine Rolle.

Genau solche infiniten hypernatürlichen Zahlen sind die gesuchten unendlich großen Anzahlen, welche für die Integralrechnung grundlegend sind, weil Integrale als *hyperendliche* Summen behandelt werden können.

Dazu als Beispiel: $\int\limits_0^a x\,dx$.

Über dem Intervall [0 ; a] sei also die Funktion zu $f(x) = x$ gegeben. Gesucht ist der zugehörige Flächeninhalt A unter dem Graphen[7] zu f.

Das Intervall [0 ; a] werde in Ω Teile zerlegt, alle von derselben Länge dx. Es gilt also $dx = \frac{a}{\Omega}$. Weil a endlich und Ω infinit ist, muss dx infinitesimal sein. An jeder Unterteilungsstelle $i \cdot dx$, $i = 1$ bis $i = \Omega$, ist der Funktionswert ebenfalls $i \cdot dx$, weil f die Identität ist. Die zugehörigen Rechtecke haben daher den Flächeninhalt $dx \cdot (i \cdot dx)$.

Ihre Summe ist damit $\sum\limits_{i=1}^{\Omega} dx \cdot (i \cdot dx)$ bzw. $dx^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{\Omega} i$.

Und nun zur eigentlichen Frage: Warum kann man für die hypernatürliche Anzahl Ω die bekannte endliche Summenformel benutzen?

Ω ist mittels der Zahlenfolge $(m) = (1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\quad \ldots)$ definiert und für jedes Folgenglied m gilt die bekannte Formel $\sum\limits_{i=1}^{m} i = \frac{1}{2}m(m+1)$. All diese Summen bilden ihrerseits die Folge $(s_m) = (1;\quad 3;\quad 6;\quad 10;\quad \ldots)$ und definieren eine andere hypernatürliche Zahl. Was liegt näher als diese mittels ihrer Rechenvorschrift zu bezeichnen, d. h. $\sum\limits_{i=1}^{\Omega} i$ bzw. $\frac{1}{2}\Omega(\Omega+1)$? Damit ist die Übertragung der Formel gelungen:

$$\sum_{i=1}^{\Omega} i = \frac{1}{2}\Omega(\Omega+1).$$

Die unterbrochene Rechnung kann nun fortgesetzt werden:

$dx^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{\Omega} i = dx^2 \cdot \frac{1}{2}\Omega(\Omega+1) = \frac{1}{2}dx^2(\Omega^2+\Omega) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a \cdot dx$, weil $dx \cdot \Omega = a$.

Der gesuchte Flächeninhalt A ist der reelle Teil davon; lässt man also den infinitesimalen Teil $\frac{1}{2}a \cdot dx$ fort, so erhält man das schon bekannte Ergebnis $A = \frac{1}{2}a^2$. Die endlichen Summen $\sum\limits_{i=1}^{n}$ lassen sich also auch für infinite Anzahlen N nutzen. Man nennt daher $\sum\limits_{i=1}^{N}$ eine hyperendliche (*hyperfinite*) Summe, denn auch sie hat bei einer bestimmten Anzahl N ein Ende.

Stunde 6: Zusammenschau von Differenzieren und Integrieren

In Stunde 4 wurde ein Beispiel dargestellt, in welchem das Integrieren als das Gegenteil zum Differenzieren erscheint. Ist das grundsätzlich so oder bedarf es dazu besonderer Eigenschaften der beteiligten Funktionen?

Zur Beantwortung dieser Frage sollen nur die hyperreellen Rechnungen beim Differenzieren bzw. Integrieren miteinander verglichen werden. Grundlage sei eine (differenzierbare) Funktion $x \longmapsto y$.

[7] Die Figur ist bekanntlich ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit dem Inhalt $A = \frac{1}{2}a^2$

Differenzieren :	Integrieren :
Schritt 1 : Es werden *Differenzen* gebildet : dx und dy. Schritt 2 : Es werden *Quotienten* gebildet : $\frac{dy}{dx}$. Ergebnis: $x \longmapsto \mathrm{y}'$ mit $\mathrm{y}' = \frac{dy}{dx}$.	Schritt a : Es werden *Produkte* gebildet : $y \cdot dx$. Schritt b : Es werden *Summen* gebildet : $\sum_{i=1}^{\Omega} y_i \cdot dx$. Ergebnis: $x \longmapsto Y$ mit $Y = \sum_{i=1}^{\Omega} y_i \cdot dx$.
Anschließend Integrieren Schritt a : Es werden *Produkte* gebildet : $\mathrm{y}' \cdot dx$ $= \frac{dy}{dx} \cdot dx = dy$. Schritt b : Es werden *Summen* gebildet : $\sum_{i=1}^{\Omega} dy_i$ $= y$. Ergebnis: $x \longmapsto y$ (Ausgangsfunktion)	**Anschließend Differenzieren** Schritt 1 : Es werden *Differenzen* gebildet : dx und dY mit $dY = y \cdot dx$. Schritt 2 : Es werden *Quotienten* gebildet : $\frac{dY}{dx} = \frac{y \cdot dx}{dx}$ $= y$. Ergebnis: $x \longmapsto y$ (Ausgangsfunktion)

Die Übersicht zeigt, dass sowohl das Differenzieren als auch das Integrieren aus je zwei Rechenoperationen bestehen. Subtraktion vor Division werden mittels Multiplikation vor Addition in der für eine Umkehrung richtigen Reihenfolge aufgehoben. Integrieren ist also ganz allgemein das Gegenteil zum Differenzieren und umgekehrt.

Weil der Übergang ins Reelle lediglich das Abstreifen von infinitesimalen Resten (man könnte auch von „infinitesimalem Ballast“ sprechen) bedeutet, kann das Ergebnis auch mit der heutigen Funktionsschreibweise notiert werden:

$$f : x \longmapsto f(x)$$

$\int f'(x)\, dx = f(x) + c$ [8]	$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)$

Diesen doppelten Zusammenhang von Integrieren und Differenzieren nennt man den *Hauptsatz der Analysis.* Man kann ihn zur Übertragung bekannter Ergebnisse der einen Art auf noch unbekannte Ergebnisse der anderen Art ausnutzen; mittels des unbestimmten Integrals lassen sich auch bestimmte Integrale berechnen.

Übertragung der behandelten Differenziationsregeln:

$(f_1(x) + f_2(x))' = f_1'(x) + f_2'(x)$	Summenregel	$\int (f_1(x) + f_2(x))\, dx$ $= \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx$
$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$	Faktorregel	$\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$
a konstant: $a' = 0$	Konstantenregel	$\int 0\, dx = 0 + c$, z.B. $c = a$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	Potenzregel	$\int x^m\, dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$ $[m{:=}n{-}1]$
$\sin'(x) = \cos(x)$	Sinus/Cosinus-Regel	$\int \cos(x)\, dx = \sin(x)$
$\exp'(x) = \exp(x)$	e-Funktionsregel	$\int \exp(x)\, dx = \exp(x)$
$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel	$\int h(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int h(z)\, dz$

Während die Differenziationsregeln für einzelne Funktionen zu leichten Integrationsregeln für dieselben Funktionstypen führen, ergeben Regeln zu Funktionsverknüpfungen für das Integrieren nicht so leichte Verfahrensweisen.

An einem Beispiel für die Kettenregel wird das deutlich. Wie kommt man auf

$$\int 2x \cdot \cos(x^2 + 1)\, dx = \sin(x^2 + 1) \text{ ?}$$

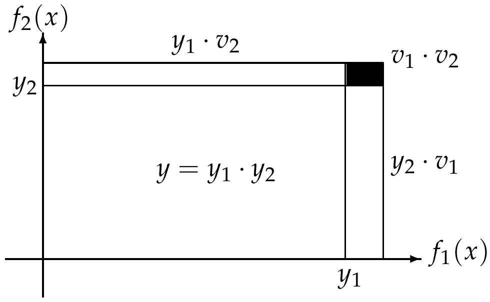
Zunächst muss eine Funktionsverkettung vorhanden sein: $\cos(x^2 + 1)$. Bevor die Kosinusfunktion verarbeitet werden kann, muss die Zwischenfunktion mit $z = (x^2 + 1)$ verarbeitet werden. Damit die Kettenregel umgekehrt werden kann, muss als einzige Faktorfunktion die Ableitung der Zwischenfunktion vorhanden sein, $z' = 2x$. Damit so einfach wie beim Differenzieren gearbeitet werden kann, ist es sinnvoll, die Differenzialschreibweise zu nutzen: $\frac{dz}{dx} = 2x$, denn dann lässt sich dx kürzen[9] .

$$\int \frac{dz}{dx} \cdot \cos(z)\, dx = \int \cos(z)\, dz = \sin(z) = \sin(x^2 + 1).$$

[9]Das Kürzen ist nur im Hyperreellen möglich. Dennoch „kürzt“man bei der Integralschreibweise des Reellen, jedoch nur um Schreibarbeit zu sparen.

Weil der Term (x^2+1) durch z ersetzt (substituiert) wird, nennt man die Umkehrung der Kettenregel die *Substitutionsmethode*.

Übertragung der noch nicht behandelten Differenziationsregel für Produktfunktionen, der Produktregel.
1. Geometrisch unterstützt wird die Untersuchung einer Produktfunktion $f := f_1 \cdot f_2$:



Jedes Produkt $a \cdot b$ lässt sich mittels eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b veranschaulichen. In der Abbildung ist für ein bestimmtes x mit dem Funktionswert $f_1(x)$, abgekürzt y_1, und entsprechend y_2 das Rechteck mit dem Flächeninhalt $y := y_1 \cdot y_2$ gezeichnet. Wird x um h verändert, so ändern sich die Funktionswerte y_i um jeweils v_i. Die resultierende Änderung v des Produkts lässt sich (für $v_i > 0$) aus der Zeichnung ablesen, es ist

$$v = y_1 \cdot v_2 + y_2 \cdot v_1 + v_1 \cdot v_2\,.$$

Hierbei ergänzt der dritte Summand, das kleine schwarze Rechteck, die Figur zum insgesamt größeren Rechteck[10], das durch die Änderung von x auf $x+h$ entsteht. Für infinitesimales $h \neq 0$ sind auch die v_i infinitesimal. deshalb ist das Produkt $v_1 \cdot v_2$ infinitesimal gegenüber allen übrigen Änderungen und wird daher weggelassen. Das kleine schwarze Rechteck ist selbst für infinitesimale Änderungen so winzig, dass es keine Rolle spielt. Insgesamt lässt sich nach Leibniz schreiben:

$$dy = y_1 \cdot dy_2 + y_2 \cdot dy_1.$$

2. Algebraische Untersuchung einer Produktfunktion $f := f_1 \cdot f_2$:
Sei $f = f_1 \cdot f_2$ das zu untersuchende Funktionsprodukt, wo beide f_i über ihrem gemeinsamen Definitionsbereich differenzierbar sein sollen. Die Frage lautet: ist auch f differenzierbar und wie findet man die Ableitung f' ?
Kurzbezeichnungen:
dx : Differenzial zur Änderung der Funktionswerte $y := f(x), y_1 := f_1(x), y_2 := f_2(x)$ um v, v_1, v_2.
Es ist $y = y_1 \cdot y_2$ das Produkt an der Stelle x und $y + v = (y_1 + v_1) \cdot (y_2 + v_2)$ an der Stelle $x + dx$.
$v = (y + v) - y$ ist demnach die Differenz $(y_1 + v_1) \cdot (y_2 + v_2) - y$; d.h.
$v = y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot y_2 + v_1 \cdot v_2 - y$. Und weil $y = y_1 \cdot y_2$, so auch

$$v = y_1 \cdot v_2 + y_2 \cdot v_1 + v_1 \cdot v_2,$$

wie oben aus der Zeichnung abgelesen.

Das Differenzieren erfolgt nun in gewohnter Weise:
a) Division durch dx: $\frac{v}{dx} = y_1 \cdot \frac{v_2}{dx} + y_2 \cdot \frac{v_1}{dx} + v_1 \cdot \frac{v_2}{dx}$; ($dx \neq 0$ infinitesimal.)
b) Übergang zum Reellen Teil, der für jeden der 3 Brüche auf der rechten Seite existiert, und aufschreiben mittels Differenzialquotienten:
$\mathrm{RT}(\frac{v}{dx}) = y_1 \cdot \frac{dy_2}{dx} + y_2 \cdot \frac{dy_1}{dx} + \mathrm{RT}(v_1) \cdot \frac{dy_2}{dx}$, wobei $\mathrm{RT}(v_1) = 0$.
Die rechte Seite bezeichnet also eine reelle Zahl, welche die gesuchte Ableitung $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ bedeutet. Multiplikation mit dx liefert die Leibnizform der Produktregel, ohne auf die Winzigkeit von $v_1 \cdot v_2$ zurückgreifen zu müssen,

$$dy = y_1 \cdot dy_2 + y_2 \cdot dy_1.$$

Für den praktischen Umgang mit der Regel ist die y-Schreibweise mit den beiden Indizes $_1$ und $_2$ zu umständlich. Man wählt daher statt dessen die beiden auch sprachlich gut zu unterscheidenden Buchstaben $\mathtt{u}$ und $\mathtt{v}$. Die Regel lautet dann:

$$d(\mathtt{u} \cdot \mathtt{v}) = \mathtt{u} \cdot d\mathtt{v} + \mathtt{v} \cdot d\mathtt{u} \quad \text{oder} \quad (\mathtt{u} \cdot \mathtt{v})' = \mathtt{u} \cdot \mathtt{v}' + \mathtt{v} \cdot \mathtt{u}'.$$

[10]Haben die v_i andere Vorzeichen, muss das Bild entsprechend geändert werden.

Beispiel: Wie lautet die Ableitung von $\mathtt{u} \cdot \mathtt{v}$ für $\mathtt{u} = x^3$ und $\mathtt{v} = x^8$?
Lösung[11]: $(x^3 \cdot x^8)' = x^3 \cdot 8x^7 + x^8 \cdot 3x^2 = (8+3)x^{10} = 11x^{10}$.

Die Struktur der Produktregel, die Aufspaltung in zwei Summanden, lässt sich nutzen, um für Kehrwerte von Funktionen die Ableitung zu bestimen.

Beispiel: Wie lautet die Ableitung von $\mathtt{u} \cdot \mathtt{v}$ für $\mathtt{u} = x^3$ und $\mathtt{v} = \frac{1}{x^3}$?
In diesem Fall ist $\mathtt{u} \cdot \mathtt{v} = \mathtt{1}$ mit der Ableitung $\mathtt{0}$.

Die Produktregel wird zur Gleichung $\mathtt{0} = x^3 \cdot \mathtt{v}' + 3x^2 \cdot \frac{1}{x^3}$. Hieraus errechnet sich die Ableitung der Kehrwertfunktion $\frac{1}{x^3}$ zu $\mathtt{v}' = -\frac{3}{x^4}$.
Es gibt aber einen raffinierten Trick, um diese Rechenmethode zu vermeiden. Dafür schreibt man den Kehrwert $\frac{1}{x^3}$ als Potenz x^n, jedoch mit dem entsprechend negativen Exponenten:

$$x^{-3} := \frac{1}{x^3}.$$

Für negative Exponenten lassen sich alle Potenzgesetze klaglos benutzen.
(a) Und so auch beim Differenzieren: $(x^{-3})' = -3 \cdot x^{-3-1} = -3x^{-4}$.
Beispiel: Wie lautet die Ableitung von $\mathtt{v} = \frac{1}{\sin x}$?
Die Methode mit der Produktregel liefert $\mathtt{v}' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Dieses Ergebnis lässt sich auch mit der Kombination von Ketten- und Potenzregel in der Form $\mathtt{v}' = -1 \cdot \sin^{-2} x \cdot \cos x$ finden.

(b) Nicht aber uneingeschränkt beim Integrieren: $\int -3x^{-4} \cdot dx = -3\frac{1}{-4+1}x^{-4+1} = x^{-3}$. (ok) Jedoch: $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \int x^{-1} \cdot dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-1+1}}x^{-1+1}$, $\frac{1}{0}$ ist nicht definiert! (einzige Ausnahme)
Weil die Funktion zu $\frac{1}{x}$ differenzierbar und damit stetig ist, existiert das Integral. Es hat allerdings noch keinen Namen; man vgl. den letzten Abschnitt
über den *natürlichen Logarithmus*.

Die zur Produktregel gehörige Regel der Integralrechnung erhält man am einfachsten aus der Leibnizform $d(\mathtt{u} \cdot \mathtt{v}) = \mathtt{u} \cdot d\mathtt{v} + \mathtt{v} \cdot d\mathtt{u}$.
Integration liefert nämlich ohne Schwierigkeiten:

$$\int d(\mathtt{u} \cdot \mathtt{v}) = \int \mathtt{u} \cdot d\mathtt{v} + \int \mathtt{v} \cdot d\mathtt{u} \qquad \text{oder} \qquad \int \mathtt{u} \cdot d\mathtt{v} = (\mathtt{u} \cdot \mathtt{v}) - \int \mathtt{v} \cdot d\mathtt{u}.$$

Schwierig kann es allerdings in der Praxis werden, die nunmehr zwei Integrale zu bestimmen. Der einfachste Fall liegt vor, wenn beide Integrale leicht zu berechnen sind, eines nach dem anderen. Diese Lösungstechnik heißt deswegen *Partielle oder Teilweise Integration*; sie lässt sich nicht umgehen.
Im allgemeinen kann man vor der Arbeit nicht entscheiden, wie kompliziert die Doppelrechnung sein wird. Ja man muss damit rechnen, dass man zu gar keinem Ergebnis kommen kann! Deshalb ist es richtig, die Partielle Integration aus dem Lehrplan zu streichen und sich über die starken Mathematikprogramme zu freuen, die heute zur Verfügung stehen.

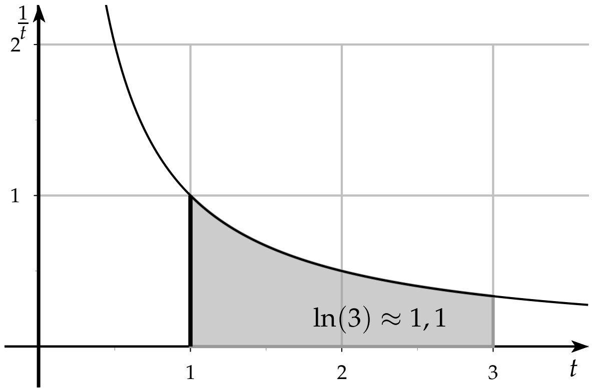
Stunde 7 Zum natürlichen Logarithmus

In der vorigen Stunde wurde erkannt, dass es zur Kehrwertfunktion mit $k(x) = \frac{1}{x}$ kein Integrationsverfahren gibt, und das, obwohl sie für alle positiven reellen Zahlen $k(x)$ stetig ist und daher Integrale $\int\limits_{t=1}^{t=x} \frac{1}{t}\,dt$ existieren und zu jedem positiven x einen Funktionswert liefern müssen[12]. Obwohl also die Funktionswerte nur näherungsweise bekannt sind, was aber für die Praxis nicht ungewöhnlich ist, bekommt die Funktion den Namen *natürlicher Logarithmus* mit der Kurzbezeichnung ln.

$$\ln(x) := \int\limits_{t=1}^{t=x} \frac{1}{t}\,dt\,, \quad x > 0.$$

Logarithmen haben eine besondere Eigenschaft, die früher eine willkommene Rechenhilfe waren, weil sie eine Zahlenmultiplikation zu einer Addition der zugehörigen Logarithmen vereinfachte — ganz so wie heute die Taschenrechner.

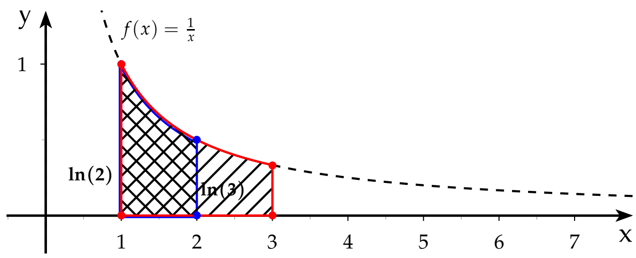
[11] Die Benutzung der Produktregel für dieses Beispiel ist natürlich unsinnig. Es zeigt aber, dass die neue Regel zu der bekannten $(x^{11})' = 11 \cdot x^{10}$ passt.
[12] Man erhält solche Werte näherungsweise, wenn man mit passenden endlichen Summen $\sum_{i=1}^{n} a_i$ rechnet.



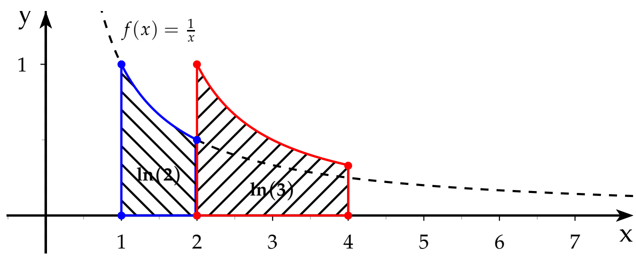
Man kann diese besondere Eigenschaft anschaulich erfassen, weil jeder Funktionswert $\ln(x)$ — wie bei bestimmten Integralen üblich — der Flächeninhalt unter der gleichseitigen Hyperbel zu $\frac{1}{t}$ zwischen 1 und x ist. Die Abb. zeigt z. B. für $x = 3$ den Funktionswert $\ln(3)$ genähert zu 1,1 mit dem entsprechenden Ebenenstück.

Die Logarithmeneigenschaft:

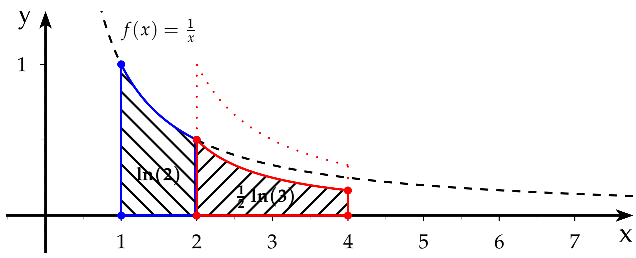
Zusätzlich zu $\ln(3)$ betrachte man einen zweiten Logarithmus, z. B. $\ln(2)$, damit eine Addition durchgeführt werden kann. Die Bilderfolge erläutert die einzelnen Schritte.



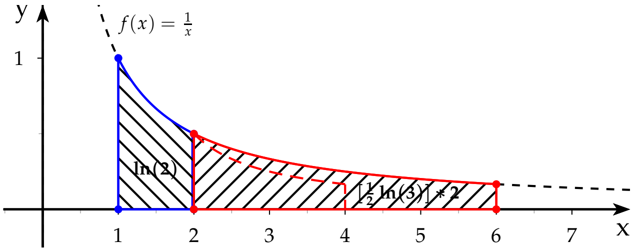
(1.) Die beiden Ebenenstücke liegen gemäß der Definition aufeinander. Das ist unpassend für eine geometrische Summenbildung. $\ln(3)$ wird daher so verschoben, dass beide Ebenenstücke genau aneinander liegen.



(2.) Ziel ist es, deren Summe als einen neuen Logarithmus zu erkennen. Dabei stört die Spitze bei 2, die doppelt so hoch ist wie das Ende des $\ln(2)$. Staucht man die zweite Teilfigur vertikal um den Faktor $\frac{1}{2}$, so passen beide Teile zusammen, man erhält jedoch nur die halbe Größe des $\ln(3)$.



(3.) Bei einer solchen Stauchung kann man sich vorstellen, dass jedes infinitesimal schmale Rechteck, das zur Bildung des Integrals $\int_{t=1}^{t=3} \frac{1}{t}\,dt$ benutzt wurde, um die Hälfte gekürzt wird. So auch die rechte Begrenzung: statt $\frac{1}{3}$ ist sie nur noch $\frac{1}{6}$ lang.



(4.) Der Flächeninhalt muss also verdoppelt werden, ohne die Stauchung rückgängig zu machen. Das gelingt, wenn man jedem halbierten Rechteck seine zweite Hälfte direkt daneben stellt. Jedes dieser „Doppelrechtecke“ ist ebenfalls infinitesimal , aber der reelle Teil ihrer Summe liefert wieder den vollständigen $\ln(3)$. Die Figur hat dadurch die doppelte Breite erhalten, man spricht von einer Dehnung um den Faktor 2.
(5.) $\ln(2)$ und $\ln(3)$ ergeben auf diese Weise eine Summenfigur, die genau zur Hyperbel passt. Ihr Flächeninhalt ist daher $\ln(6)$.
Zur Kontrolle seien einige Funktionswerte zwischen den$x$-Werten 2 und 6 bestimmt:

- Die Stelle $x = 2$ war vor der Verschiebung bei $x = 1$, der Funktionswert also $y = 1$. Er wurde dann auf $\frac{1}{2}$ gestaucht; $(2\,;\,\frac{1}{2})$ ist ein Hyperbelpunkt.
- Die Stelle $x = 3$ war vor der Dehnung $x = \frac{5}{2}$, vor der Verschiebung $x = \frac{3}{2}$, der Funktionswert also $y = \frac{2}{3}$; er wurde dann auf $\frac{1}{3}$ gestaucht; $(3\,;\,\frac{1}{3})$ ist ein Hyperbelpunkt.

Allgemein: Eine Stelle x war vor der Dehnung $2 + \frac{x-2}{2}$ und vor der Verschiebung $1 + \frac{x-2}{2} = \frac{x}{2}$, der Funktionswert also $y = \frac{2}{x}$. Er wurde dann auf $\frac{1}{x}$ gestaucht; $(x\,;\,\frac{1}{x})$ ist ein Hyperbelpunkt.
Die Logarithmeneigenschaft bringt also die *Addition* zweier Logarithmen $\ln(a) + \ln(b)$ mit der *Multiplikation* ihrer „Numeri“ $a \cdot b$ zusammen:

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)\,.$$

Weil es etwas gewagt erscheint, aus einer eher anschaulichen Argumentation zu einem Beispiel für die beiden konkreten Logarithmen $\ln(2)$ und $\ln(3)$ sofort zu verallgemeinern, soll die Algebra benutzt werden, um die einzelnen Schritte zu berechnen. Es genügt, die Funktionsterme der begrenzenden Kurvenstücke zu zwei Logarithmen $\ln(a)$ und $\ln(b)$ entsprechend umzuformen.

Nach Definition ist $\quad \ln(a) = \int\limits_{t=1}^{t=a} \frac{1}{t}\,dt\,, \quad a > 0 \quad$ und $\quad \ln(b) = \int\limits_{t=1}^{t=b} \frac{1}{t}\,dt\,, \quad b > 0.$

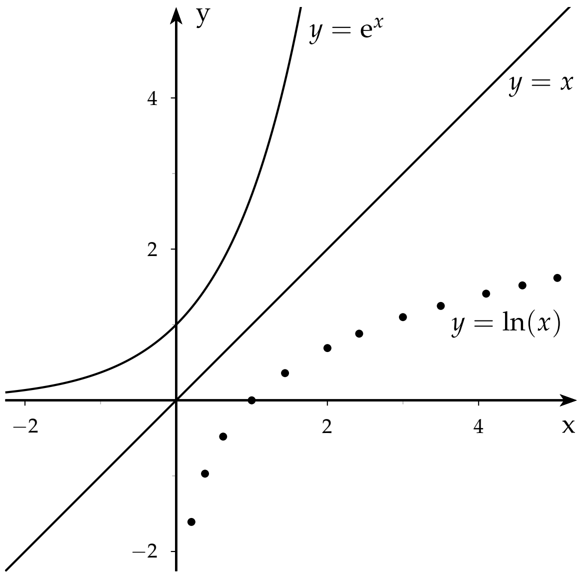
Beide Logarithmen werden also von derselben Kurve, der gleichseitigen Hyperbel zu $f(x) = \frac{1}{x}$, begrenzt. Der erste Bogen nutzt das Intervall $(1;a)$, der zweite $(1;b)$. Sie liegen also (teilweise) übereinander. Weil beide Ebenenstücke addiert werden sollen, werde $\ln(a)$ an seinem Platz belassen, der zweite Bogen aber um $a - 1$ nach rechts verschoben. Dieser wird daher durch $f(x - (a-1)) = \frac{1}{x-a+1}$ im Intervall $(a;a+b-1)$ begrenzt. Man benutzt für die **V**erschiebung vereinfachend eine andere Funktion v, $v(x) := f(x - (a-1))$.
Der Bogen zu v beginnt nun genau dort (nämlich bei a), wo der zu $\ln(a)$ aufhört, eine wichtige Voraussetzung zur Flächenaddition ist erfüllt. Aber die beiden Bögen kann man bestimmt nicht durch eine gemeinsame (stetige) Funktion beschreiben. Wie lässt sich der Sprung von $\frac{1}{a}$ auf 1 beheben? Die Division der Funktionswerte von v durch a erledigt diese Aufgabe. An der Stelle a war vorher $v(a) = 1$, anschließend ist wie gewünscht $\frac{v(a)}{a} = \frac{1}{a}$. Wird das für alle x aus dem Intervall $(a;a+b-1)$ getan, **s**taucht man den ganzen Bogen v durch a und erhält einen weiteren Bogen s mit $s(x) = \frac{v(x)}{a}$.
Augenscheinlich passt sich s dem Bogen zu $\ln(a)$ gut an, aber das braucht gar nicht erst untersucht zu werden. s kann nämlich nur die gestauchte Fläche begrenzen, die zu $\frac{\ln(b)}{a}$ gehört. Die Stauchung durch a muss also mittels einer **D**ehnung um a korrigiert werden. Diese Dehnung darf nicht in vertikaler Richtung erfolgen, man käme nur zu v zurück. Sie soll deswegen in horizontaler Richtung von a aus erfolgen. Jedem x_s aus dem Intervall $(a;a+b-1)$, das zum Bogen s gehört, werde daher ein x für den gedehnten Bogen d zugeordnet, so dass gilt: $x - a = (x_s - a) \cdot a$.
Für die linke Grenze des Intervalls $(a;a+b-1)$, also a, ergibt sich aus $x_s = a$ auch für das gedehnte Stück x ebenfalls a; diese Grenze bleibt also unangetastet.
Die rechte Grenze $a+b-1$ liefert aus $x_s = a+b-1$ ein x, das sich nach Definition der Dehnung berechnet aus $x - a = ((a+b-1) - a) \cdot a \quad$ zu $\quad x = a + (b-1) \cdot a = a \cdot b$. Der gedehnte Bogen d ist also über dem gedehnten Intervall $(a;a \cdot b)$ definiert.
Zu jeder Stelle x aus diesem Intervall muss nur noch der gewünschte Funktionswert $d(x)$ festgelegt werden. Dazu dienen natürlich die Funktionswerte der zu korrigierenden Stauchung $s(x_s)$, wobei x und x_s über die Dehnungsdefinition mit einander verbunden sind.
Es wird daher festgelegt: $\;d(x) := s(x_s)$.

Alle Bögen wurden mittels Funktionsgleichungen aus der jeweils davor liegenden beschrieben; die Kurzbezeichnungen: f, v, s und d waren lediglich Hilfen zur einfachen Handhabung. Sie sollen nunmehr algebraisch zusammengefasst werden.
$f(x) = \frac{1}{x}$ (Gleichseitige Hyperbel als Grundlage.)
$v(x) = f(x - a + 1) = \frac{1}{x-a+1}$.
$s(x) = \frac{v(x)}{a} = v(x) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x-a+1} \cdot \frac{1}{a}$ und somit $s(x_s) = \frac{1}{x_s-a+1} \cdot \frac{1}{a}$.
Aus der Dehnung $x - a = (x_s - a) \cdot a$ folgt $x_s = a + (x - a) \cdot \frac{1}{a}$. Und darum
$d(x) = \frac{1}{a+(x-a)\cdot\frac{1}{a}-a+1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{x}{a}-1+1} \cdot \frac{1}{a}$, d. h. $d(x) = \frac{1}{x}$.
Bereits in der letzten Figur konnte man sehen, dass d ein Teil der Hyperbel sein müsste. Jetzt ist es algebraisch geklärt. Der Gesamtbogen von 1 bis $a \cdot b$ begrenzt den $\ln(a \cdot b)$, der Teilbogen d ein Ebenenstück, das nach Konstruktion $\ln(b)$ beinhaltet. Somit ist erkannt, dass

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b).$$

Heutzutage multipliziert man Dezimalzahlen nicht mehr mit Bleistift und Papier, daher haben die Logarithmentafeln ausgedient. Aus einem anderen Grund ist aber der natürliche Logarithmus in der Mathematik weiterhin wichtig.

Der natürliche Logarithmus als Kehrfunktion zur e-Funktion:
In der letzten Gleichung desvorigen Abschnitts werden die Grundrechenarten Multiplikation und Addition so verknüpft, dass man die (schwierigere) Multiplikation durch die (einfachere) Addition zweier Zahlen ersetzen kann. Ähnliches ist in den Potenzgesetzen enthalten: $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$. Dies legt einen Zusammenhang der neuen Funktion ln mit Exponentialfunktionen nahe. Einen weiteren Hinweis darauf kann man der folgenden Abbildung entnehmen, die einige Werte der Funktion ln und die Graphen der e-Funktion und der Identität $y = x$ zeigt.



In der Abbildung sieht es so aus, dass der Graph von ln durch Spiegelung des Graphen der e-Funktion an dem der Identität hervorgeht. Sollte dies tatsächlich der Fall sein, wären ln und die e-Funktion Umkehrfunktionen zueinander. Dies soll im Folgenden nachgewiesen werden.
Dazu werden beide Funktionen verkettet und anschließend diese Verkettung abgeleitet.
Sei also $y = f(x) = \ln(e^x)$ bzw. $y = \ln(z)$ mit $z = e^x$. Dann erhält man mit Hilfe der Kettenregel für die Ableitung von f,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x} = 1\,.$$

Weil die Ableitung der Verkettung gleich 1 ist, muss die Funktion f daher eine lineare Funktion der Form $f(x) = x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ sein. Aus der Definition von ln ergibt sich $f(0) = \ln(e^0) = \ln(1) = 0$. Daraus folgt $C = 0$ und somit gilt $f(x) = x$ bzw. $\ln(e^x) = x$.
Die Funktion ln [13] ist also tatsächlich die Umkehrfunktion der e-Funktion (und umgekehrt):

$$\ln(\exp(x)) = x = \exp(\ln(x))\,.$$

[13] $\ln = \log_e$ steht für das lateinische *logarithmus naturalis* = natürlicher Logarithmus.

Sie wird deshalb zum Auflösen von Exponentialgleichungen benötigt. Da Exponentialfunktionen in vielen Zusammenhängen auftreten, hat die natürliche Logarithmusfunktion auch heute noch große Bedeutung.